Have we already detected astrophysical symptoms of space-time noncommutativity ?

早大理工前田研究室　玉置 孝至

近年、10^{20} eV を超える超高エネルギー宇宙線及び 20 TeV を超える γ 線が報告されており、これらを説明するため、ローレンツ不変性の破れが考察されている [1]。例えば、$p+\gamma \to p+\pi$ の過程を考えると、分散関係がローレンツ不変な場合と異なるため、反応の閾値が変わり、上記の現象を説明できる。

しかし、そのために光速がエネルギー依存性を持ち、観測から強い制限を受ける。Markarian 421 (地球から約 140 Mpc) を源とする γ 線の観測から、光速がエネルギー依存しない事が示唆されており、このために生じる制限を守りながら、上記の高エネルギー現象を説明する事は困難であるとする意見もある [2]。

ただ、この議論がどれ程一般的であるかは詳しく調べられておらず、我々はこの問題を考えるため、時空の非可換性を取り入れた κ ミンコフスキー時空というモデルを考えた [3]。交換関係は $i,j=1,2,3$ として $[x^i,t]=i\lambda x^i,\quad [x^i,x^j]=0$ であり、これと関連して、エネルギー、運動量の和を $\hat{+}$ で表すことにすると、

$$(E_1\hat{+}E_2, \boldsymbol{p}_1\hat{+}\boldsymbol{p}_2) \;:=\; (E_1+E_2, \boldsymbol{p}_1+e^{\lambda E_1}\boldsymbol{p}_2) \tag{1}$$

平面波を文献 [4] に従い、

$$\psi_{(E,\boldsymbol{p})} = e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}e^{iEt} \tag{2}$$

と書き、t は x の右に持ってくる。この時、

$$\psi_{(E_1,\boldsymbol{p}_1)(E_2,\boldsymbol{p}_2)} = \psi_{\boldsymbol{p}_1,E_1}\psi_{\boldsymbol{p}_2,E_2} \tag{3}$$

が成り立つ。逆向きの波は

$$\psi_{(E,\boldsymbol{p})^{-1}} := e^{-i\boldsymbol{p}e^{-\lambda E}\cdot\boldsymbol{x}}e^{-iEt} = e^{-iEt}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{4}$$

であり、$(E,\boldsymbol{p})^{-1}$ は $(E,\boldsymbol{p})$ の逆元である。分散関係は

$$\lambda^{-2}(e^{\lambda E}+e^{-\lambda E}-2)-\boldsymbol{p}^2e^{-\lambda E} = \lambda^{-2}(e^{\lambda m}+e^{-\lambda m}-2) \tag{5}$$

のように変更される。

さて、群速度を考えるため、微小変化 ΔE ,$\Delta\boldsymbol{p}$ が、$(\Delta E',\Delta\boldsymbol{p}')$ を足し挙げた結果として

$$(E\hat{+}\Delta E', \boldsymbol{p}\hat{+}\Delta\boldsymbol{p}') = (E+\Delta E, \boldsymbol{p}+\Delta\boldsymbol{p}) \tag{6}$$

のように得られるとする。この場合、ΔE, $\Delta\boldsymbol{p}$ の一次の微少量まで取ると、

$$(\Delta E',\Delta\boldsymbol{p}') \cong (\Delta E, \frac{\Delta\boldsymbol{p}}{e^{\lambda E}}) \tag{7}$$

であり、(3) と (7) を用いて平面波の重ね合わせを考えると、

$$\begin{aligned} I &= \psi_{(E-\Delta E,\boldsymbol{p}-\Delta\boldsymbol{p})}+\psi_{(E+\Delta E,\boldsymbol{p}+\Delta\boldsymbol{p})} \\ &= \psi_{(E,\boldsymbol{p})(-\Delta E',-\Delta\boldsymbol{p}')}+\psi_{(E,\boldsymbol{p})(\Delta E',\Delta\boldsymbol{p}')} \\ &= \psi_{(E,\boldsymbol{p})}\psi_{(-\Delta E',-\Delta\boldsymbol{p}')}+\psi_{(E,\boldsymbol{p})}\psi_{(\Delta E',\Delta\boldsymbol{p}')} \\ &= \psi_{(E,\boldsymbol{p})}[e^{-i\Delta\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x}}e^{-i\Delta E't}+e^{i\Delta\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x}}e^{i\Delta E't}] \\ &\cong 2e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}e^{iEt}\cos\left[\frac{\Delta\boldsymbol{p}}{e^{\lambda E}}\cdot\left(\boldsymbol{x}+\frac{e^{\lambda E}\Delta Et}{\Delta\boldsymbol{p}}\right)\right] \end{aligned} \tag{8}$$

$|I|^2$ を考える事で群速度は

$$\boldsymbol{v}_l := e^{\lambda E}\frac{dE}{d\boldsymbol{p}} \tag{9}$$

と書ける。同様に

$$(\Delta E'\hat{+}E, \Delta\boldsymbol{p}'\hat{+}\boldsymbol{p}) = (E+\Delta E, \boldsymbol{p}+\Delta\boldsymbol{p}) \tag{10}$$

についても考える必要があり、この場合の群速度は

$$\boldsymbol{v}_r := \frac{\frac{dE}{d\boldsymbol{p}}}{1-\lambda\boldsymbol{p}\cdot\frac{dE}{d\boldsymbol{p}}} \tag{11}$$

(5) を使うと、質量を持たない粒子に対しては $|\boldsymbol{v}_l|=|\boldsymbol{v}_r|=1$ であり、通常のミンコフスキー時空と光速は変わらない。この結果は、時空の非可換性を伴うようなモデルでは、通常言われているローレンツ不変性の破れに対する制限はつかない事を示す重要な例である。このため、λ を適当に選ぶ事により、超高エネルギー宇宙線、γ 線を説明する事が出来る。我々は既に時空の非可換性の証拠を見ているのかも知れない。

参考文献

[1] 例えば、S. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999).

[2] G. Amelino-Camelia et al., Nature **393**, 768 (1998); G. Amelino-Camelia and T. Piran, Phys. Rev. D **64**, 036005 (2001).

[3] T. Tamaki, T. Harada, U. Miyamoto and T. Torii, gr-qc/0111056.

[4] G. Amelino-Camelia, J. Lukierski and A. Nowicki, Int. J. Mod. Phys. A **14**, 4575 (1999); G. Amelino-Camelia and S. Majid, Int. J. Mod. Phys. A **15**, 4301 (2000).