

# 高次元重力の展開

田中貴浩 (京大理)

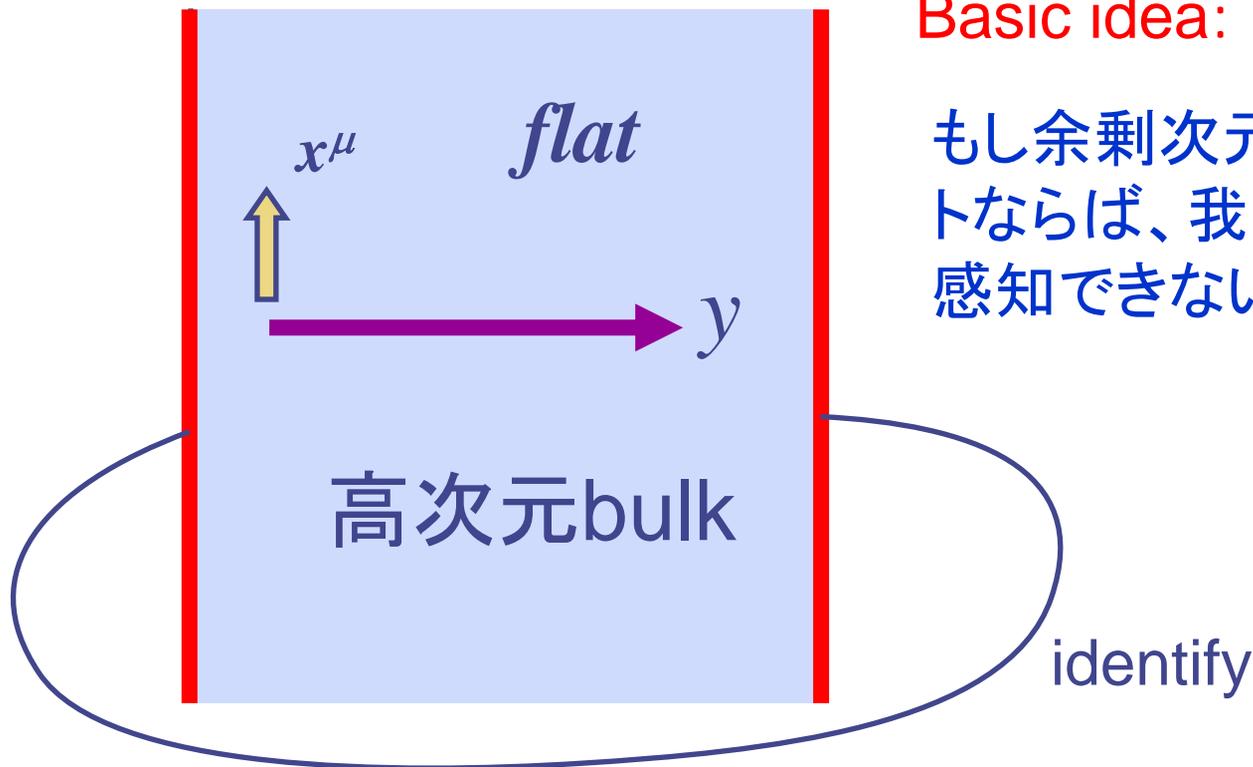
# Compactification

## ◆ 素粒子論のモデル

- Superstring theory (10次元) 、 M-theory (11次元)

## ◆ 我々の宇宙は4次元

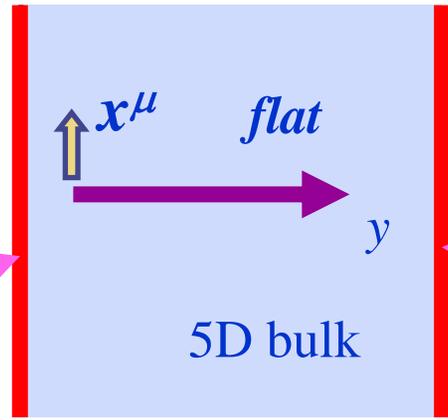
→ Compactification!



Basic idea:

もし余剰次元が非常にコンパクトならば、我々はその存在を全く感知できない。

# Kaluza-Klein コンパクト化



◆ 例えば5次元のMinkowski

- $y \sim y+R$  同一視
- $\phi = 0$  スカラー場

$$\phi = \sum \underbrace{\psi_m(x^\mu)}_{\text{4d-part}} \underbrace{u_m(y)}_{\text{余剰次元依存性}}$$

$y = 0$   $y = R$

identify

$$\left( \begin{matrix} (4) \\ -m^2 \end{matrix} \right) \psi_m = 0$$

$$\left( \partial_y^2 + m^2 \right) u_m = 0$$

変数分離の分離定数  $m^2$  が  
4次元のmassの役目を果たす。

こちらの固有値方程式が  
 $m^2$  を決定する。

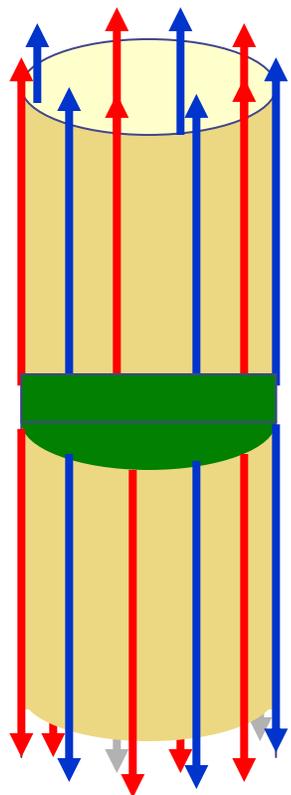
解:  $u_m(y) = \sin(my + \delta)$

同一視  $u_m(y) = u_m(y + R)$

$$mR = 2\pi j$$

One massless mode ( $j=0$ )  
Mass gap =  $O(1/R)$   
Kaluza-Klein tower

# 新しいコンパクト化の方法(braneworld)



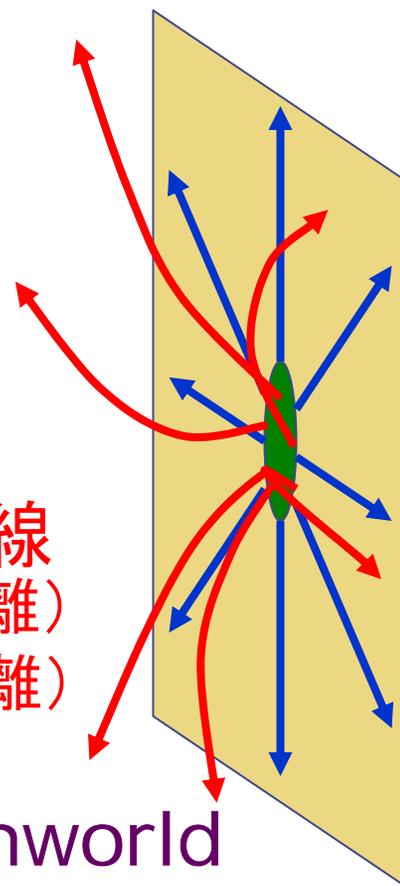
青: 電気力線  
 $F \propto 1/r^2$

赤: 重力の力線  
 $F \propto 1/r^{D-2}$  (近距離)  
 $1/r^2$  (遠距離)

Kaluza-Klein

コンパクト化

高次元方向には一様



Braneworld

重力のみが高次元時空中を伝播

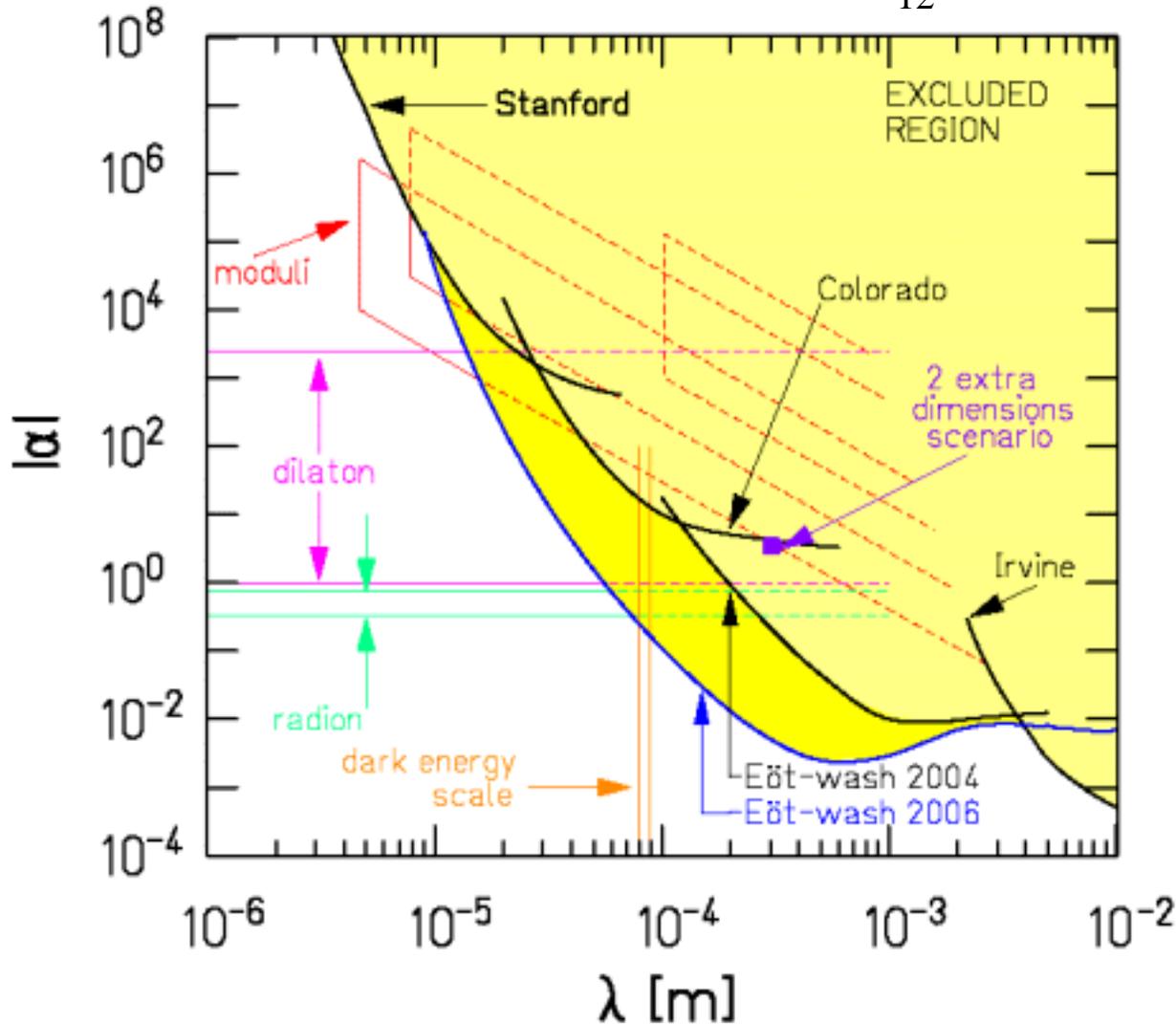
Standard modelの場合はブレーンに局在  
-局在させないと実験と完全に矛盾

重力は時空の力学  
なので、高次元時空  
があれば、そこを重  
力が伝わるのは自  
然。

重力に対する観測  
的制限が弱い為、  
余剰次元の大きさ  
が比較的大きくても  
無矛盾。  $\sim 0.1\text{mm}$

# 逆2乗則からのずれに対する制限

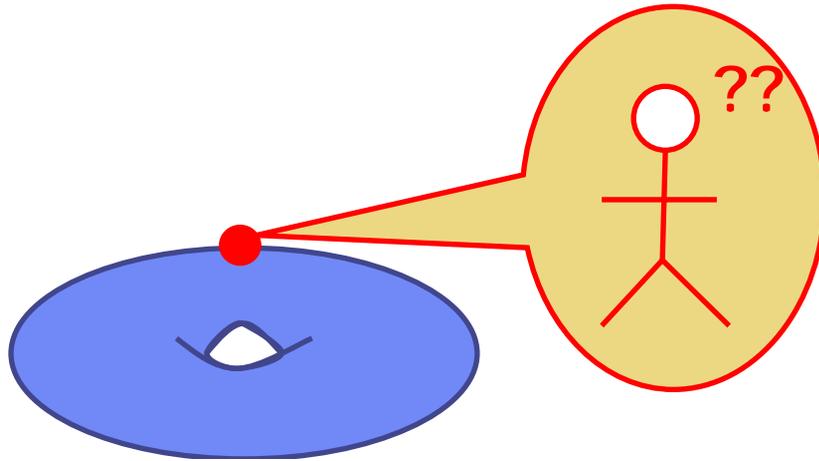
◆ Short range force  $U = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} [1 + \alpha \exp(-r_{12} / \lambda)]$



Capner et al  
hep-ph/0611184

# Large extra dimensions (ADD model)

Arkani-Hamed, Dimopoulos and Dvali (1998)



4次元時空  
× 2次元トーラス

余剰次元の体積

$$S = \frac{1}{16\pi G_{n+4}} \int d^4x \int d^n y \sqrt{-g} R$$

余剰次元方向に一様を仮定



$$\frac{V_n}{16\pi G_{n+4}} \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} R^{(4)}$$

この部分が有効ニュートン  
重力定数とみなせる

$$\sim 1/16\pi G_N$$

$$M_{pl}^2 \approx M_{n+4}^{n+2} d^n$$

余剰次元の  
length scale

## 階層性問題

特に  $n=2$  の場合,

$M_6$  を electroweak scale

$1\text{TeV} = 10^3\text{GeV}$  にとると

余剰次元のスケールが

$$d = 1\text{mm} \approx (10^{-13}\text{GeV})^{-1}$$

$$(10^{19}\text{GeV})^2 \approx (10^3\text{GeV})^4 (10^{-13}\text{GeV})^{-2}$$

# coincidence

## ◆ Large Hadron Collider (LHC)

- 7TeV+7TeVの2proton衝突 ('07完成?)

$$\frac{(\text{TeV})^2}{M_{\text{pl}}} = \frac{10^6 \text{GeV}^2}{10^{19} \text{GeV}} = 10^{-13} \text{GeV} = 10^{-4} \text{eV} \approx \frac{10^{-3} \text{eV}}{\text{cosmological constant}}$$

1mm  
逆2乗則

## ◆ weakスケールでの重力を含む力の統一?

## ◆ consistentな低エネルギーでの重力理論変更の可能性

## ◆ あまり検討されていない新たなコンパクト化 ⇒未知の現象や効果への期待

# Warped extra dimension

階層性問題をwarpによって説明しようという提案

Randall Sundrum I model (1999)

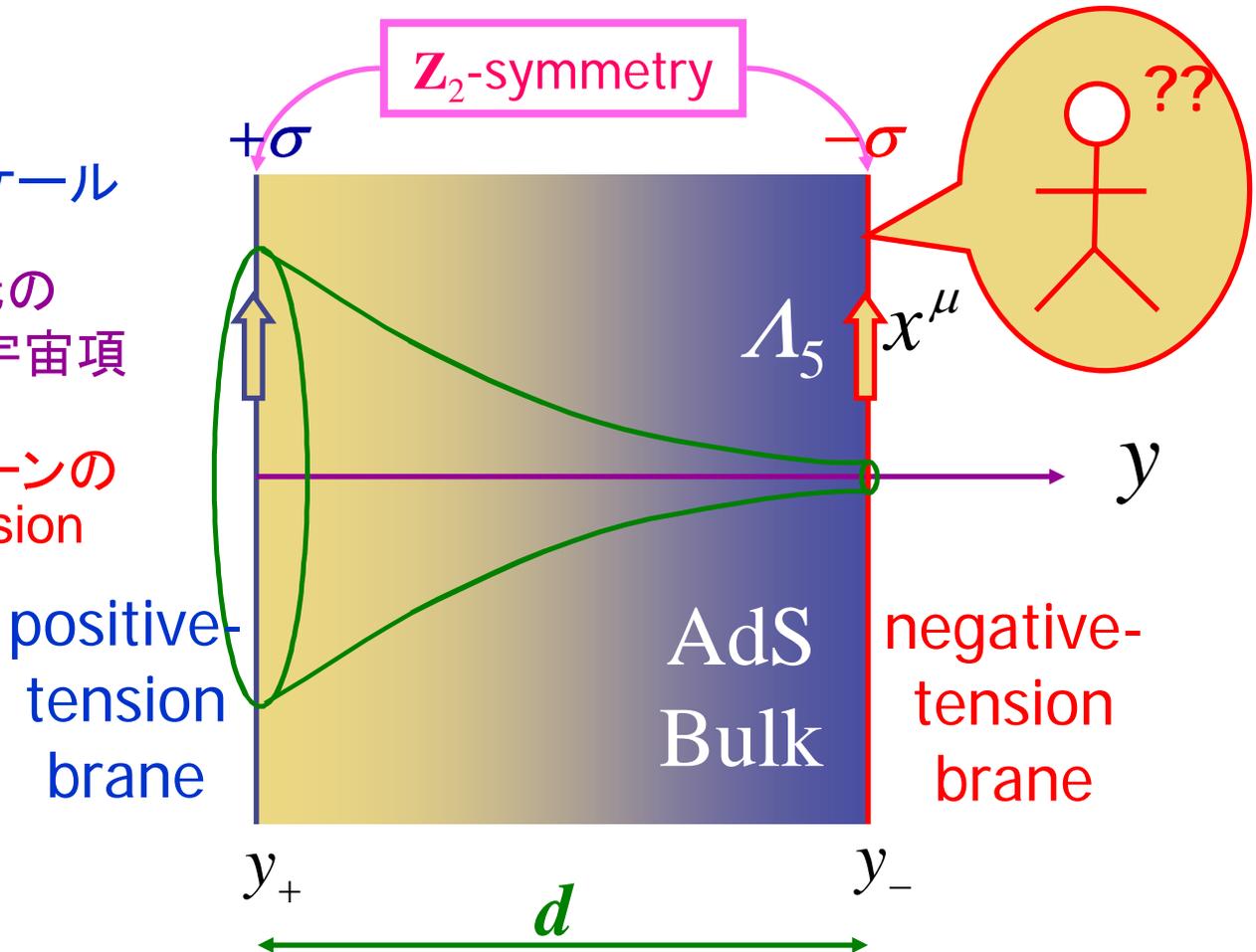
5 D anti-de Sitter

$$ds^2 = dy^2 + e^{-2y/\lambda} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)$$

$\lambda$ : AdS 曲率スケール

$$\Lambda_5 = -\frac{6}{\lambda^2} \text{ 5次元の負の宇宙項}$$

$$\sigma = \frac{3}{4\pi G_5 \lambda} \text{ ブレーンの tension}$$



4次元の有効理論は、ラフには 金太郎飴 configuration を代入  
 することでわかる。  $ds^2 = dy^2 + e^{-2y/\lambda} (g_{\mu\nu}^{(4)} dx^\mu dx^\nu)$

$$S = \frac{M_5^3}{2} \int dy \int d^4 x \sqrt{-g} \{R + 2\Lambda_5\}$$

代入

$$S \supset M_5^3 \int_{y_+}^{y_-} dy e^{-2y/\lambda} \int d^4 x \sqrt{-g^{(4)}} R^{(4)}$$

$$\frac{\lambda M_5^3}{2} (e^{-2y_+/\lambda} - e^{-2y_-/\lambda})$$

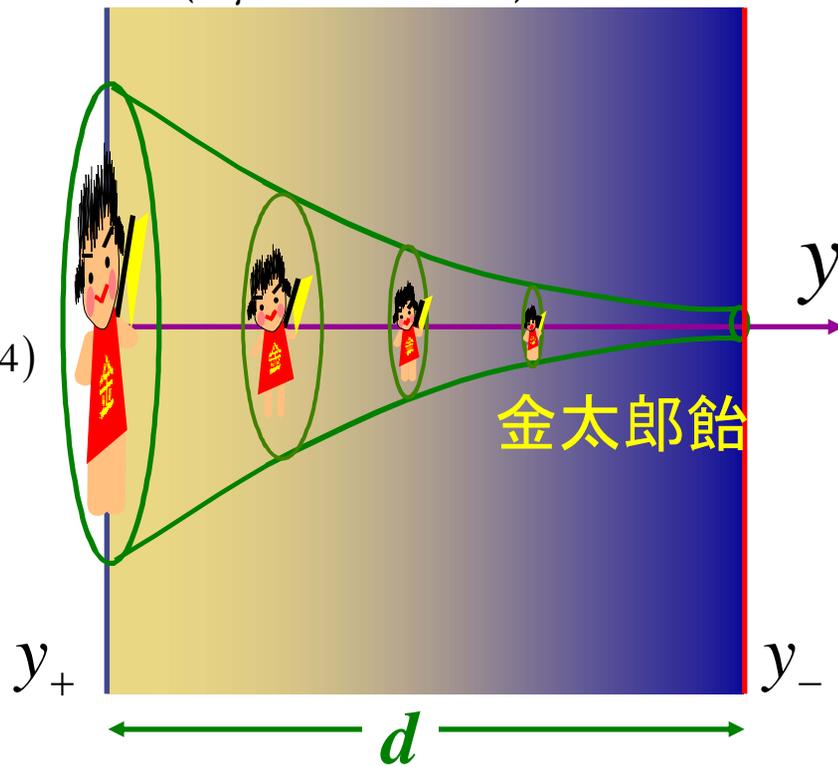
この部分が有効重力  
 定数を与える

negative tension brane に住む場合

$$M_{pl}^2 = (e^{2d/\lambda} - 1) M_5^3 \lambda$$

$(10^{19}\text{GeV})^2$                        $(\text{TeV})^2$

$d \sim 40$  で階層性を解決



positive tension brane に住む場合

$$M_{pl}^2 = (1 - e^{-2d/\lambda}) M_5^3 \lambda$$

階層性問題は解決しないが、  
 $d \rightarrow \infty$  でも有限の  $M_{pl}$   
 $\Rightarrow$  新しいコンパクト化 (RSII)

# RSII braneworld における重力と宇宙論

## ◆ 何故 RSII modelが盛んに研究されてきたのか？

通常、コンパクト化すると4次元の有効理論としてはコンパクト化のサイズに対応したmassless scalar fieldが現れる。**有害(第5の力)**

$$\delta g_{\mu\nu} \propto -1 \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

この係数は4次元一般相対論では1/2だが、  
余分なscalar場の自由度があると1/2からずれる

current bound  $< 10^{-5}$

無害にするため、

コンパクト化のサイズを固定 (stabilization)するメカニズムを加える

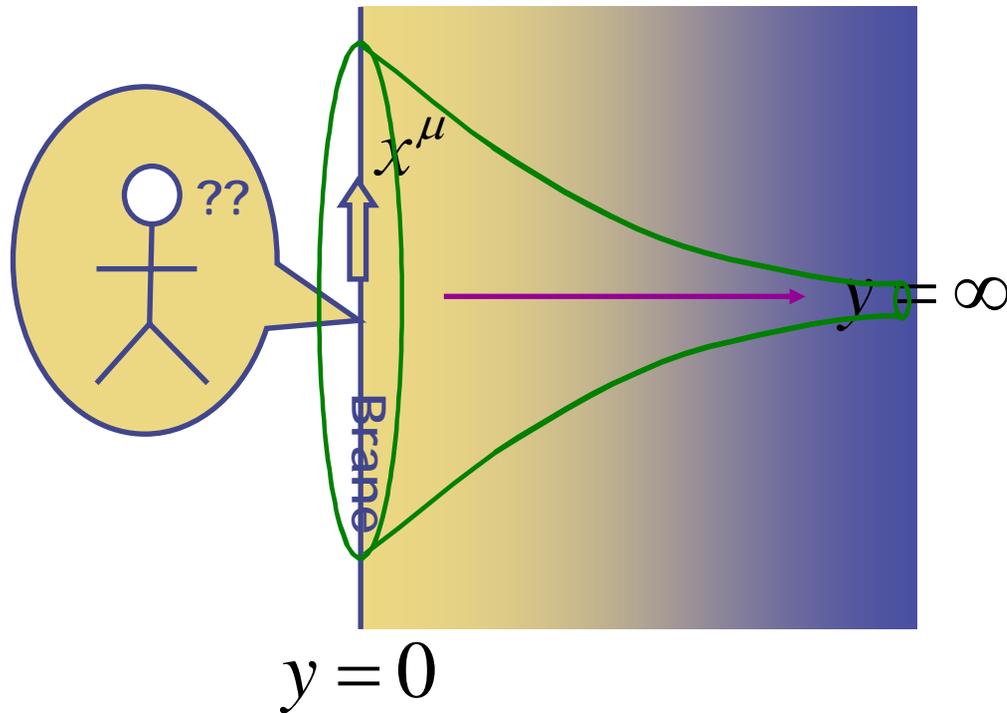
⇒ massiveになり短距離力になるため無害

湯川型のポテンシャル  $\frac{1}{r} e^{-mr}$

しかし、(mass scale) $^{-1}$ ～(compact化のサイズ) 以上では影響がほとんどない。  
逆に、そのサイズ以下ではstabilizationのメカニズムに依存

一方、

RSIIではwarped geometryの効果でeffectiveにコンパクト化が実現されている。



Stabilizationを必要としないため、逆に重力がnon-trivial!

## ◆ 一般相対論からのずれ

- Effective Einstein eq. Shiromizu Maeda & Sasaki (2000)
- RSII (infinite extra-dimension) における長波長での補正  
Garriga & Tanaka (2000)
- Black holeの古典的蒸発(AdS/CFT対応)  
Tanaka (2003), Emparan et al (2002)

## ◆ 宇宙論的な効果

- $H^2 = \rho + \rho^2$  Friedmann方程式の変更,
- dark radiation Mukohyama (2000)
- bulk inflaton Himemoto & Sasaki ('01)
- inflationの起こる時期のinflatonの期待値を小さくする効果  
Maartens, Wands, Bassett and Heard (2000)
- cosmological perturbationに対する高次元の影響

Hiramatsu, Koyama & Taruya ('04,'05), Ichiki & Nakamura ('04),  
Kobayashi & T.T. ('05,'06), Kobayashi ('06),  
Hiramatsu & Koyama ('06)

# Black hole 生成 @TeV スケール

## ◆ 加速器でblack hole生成が可能かも？

- 通常は不可能

BHが生成される条件は:

量子重力が効くfundamentalスケールよりもSchwarzschild半径が大

$$R_s = \frac{2M}{M_{pl}^2} > \frac{1}{M_{pl}} \quad \text{とすると}$$

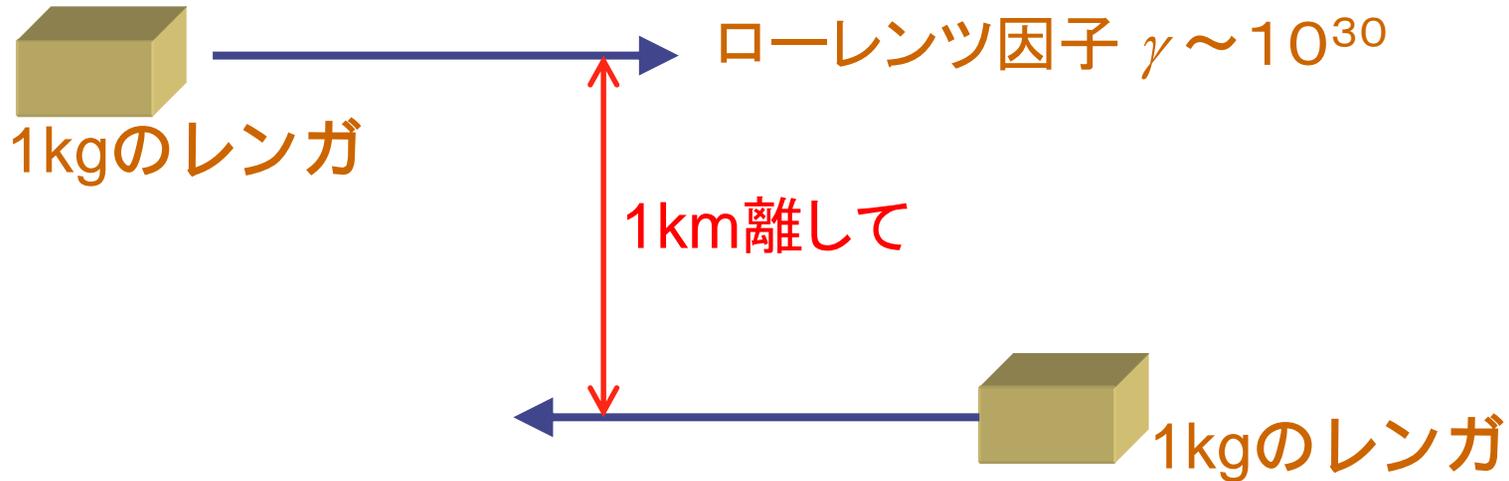
$$E \approx M > M_{pl} \quad M_{pl} \text{を超える重心系でのエネルギーが要求される}$$

## ◆ 重力のfundamentalスケール ~ TeV ならば

- 同様の理屈で必要な重心系エネルギーはTeV程度
- これなら実現可能かも？

# Black hole生成とは言うものの...

## ◆ 考えているのはこんな状況



片方のレンガから見たとき、もう一方のレンガのeffective massは  $\gamma M \approx 10^{33} \text{ g}$   $\Rightarrow$  Schwarzschild半径が1km

衝突?したときには既にhorizonの中なのでBHができるしかない

## ◆ より厳密な取り扱い

- shockwave solutionの衝突でapparent horizonが形成されることを確認  
Eardley & Giddings ('02), yoshino & Nambu ('03, '04), etc.

# BH 生成から蒸発までのシナリオ

ホライズンの形成

$$\text{散乱断面積} \approx r_g^{D-2} \approx \left( \frac{E}{M_D^{D-3}} \right)^{\frac{D-2}{D-3}}$$

重力波放出 ⇒ Kerr BH

Hawking 輻射

大半がブレーン上の粒子として放出される。

Emparan, Horowitz & Myers (2000)

⇒ Hawking 輻射の spectrum が観測される???

Kodama & Ishibashi ('03), Ida, Oda & Park ('03, '05, '06)

Harris & Kanti ('05), etc.

Braneからの離脱 T.T. & Flachi ('05)



ブレーン無しの高次元black holeの研究も進んだ

# 宇宙項問題と高次元重力

## ◆ Originalの宇宙項問題)

何故、宇宙項の値は小さいのか？

$$\Lambda \sim (10^{-3} \text{ eV})^4$$

- 加えて、Coincidence 問題

何故、現在 $\Omega_\Lambda \sim 1$ なのか？

## 人間原理

- ◆ 観測される物理定数の確率分布に観測者の存在確率の重みをかけるという考え方。

$$\text{観測確率} = \text{銀河の生成率} \times \text{先見的確率}$$

先見的確率

は初期宇宙の物理で決まるべきもの。しかし、 $\Lambda=0$ が特別でないならば、 $\Lambda$ の小さな範囲を問題にする限り一様確率分布が自然。

If  $\text{先見的確率} \sim \text{一様}$



$\text{観測確率} \sim \text{銀河の生成率}$

◆ 一様な $\Lambda$ の先見的确率分布を得るメカニズム:

- 3-form 場:  $A_{\nu\rho\sigma}$

$$S_F = \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu\rho\sigma} \quad F_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial_{[\mu} A_{\nu\rho\sigma]}$$

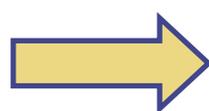


$$F^{\mu\nu\rho\sigma}{}_{;\mu} = 0$$



完全反対称

$$F^{\mu\nu\rho\sigma} = c \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$



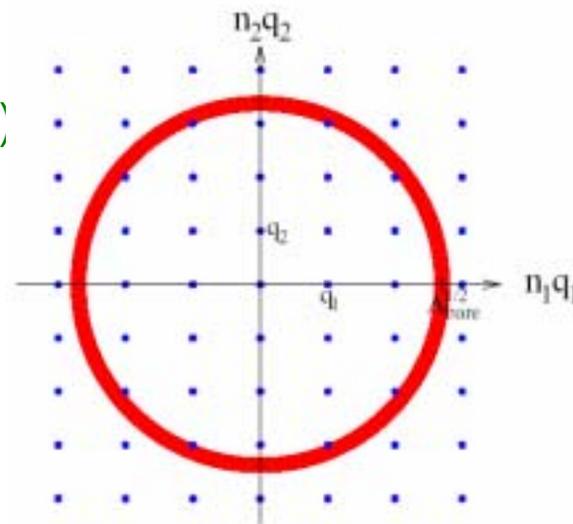
$$\frac{\partial c}{\partial x^\mu} = 0 \quad c \text{が積分定数}$$

◆ string理論のcontextでは $c$ は量子化されている。

- 量子化されている間隔が大きすぎる[grid problem]
- 沢山の3-formが出てくることで解決される。

Bousso & Polchinski (2000)

$$\Lambda = \Lambda_{\text{bare}} + \frac{1}{2} \sum F_a^2 = \Lambda_{\text{bare}} + \frac{1}{2} \sum n_a^2 q_a^2$$



観測確率

~

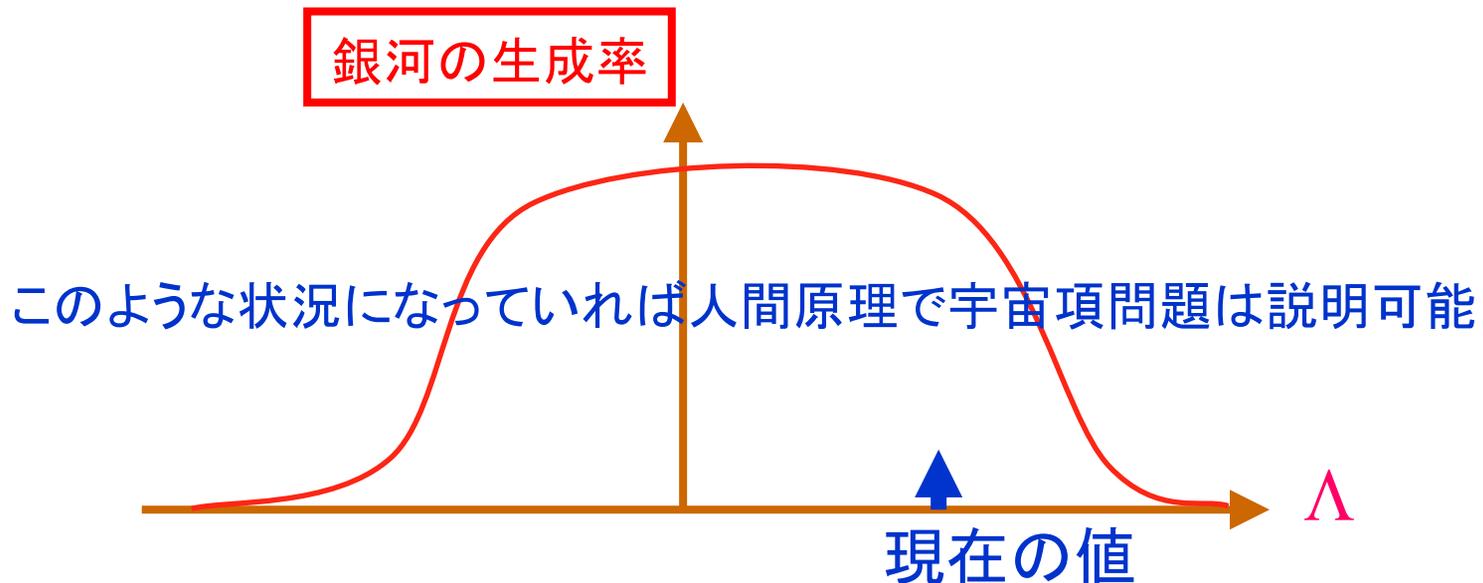
銀河の生成率

銀河の生成率:

$\Lambda$ の大きな宇宙では、早くから加速膨張が始まる

⇒ 密度ゆらぎの成長が止まり銀河ができにくい。

$\Lambda$ が負の宇宙では、すぐに宇宙がcollapseしてしまう。



銀河の生成率の評価の問題

particle cosmologyの問題

というよりも

(超?)銀河進化の問題

$10^{12}M_{\text{sol}}$ の銀河が必要とすると上のような状況になる。

Garriga & Vilenkin ('03)

$10^6M_{\text{sol}}$ の銀河で十分なら  $\Lambda < 500$  Weinberg ('89)

密度ゆらぎのamplitudeも確率的だとすると

Garriga & Vilenkin ('06)

宇宙項問題は問題でないのかもしれないが、別の解決策があるかもしれない。

理論屋としては、その他の問題とセットで解決できることを夢見る。

Dark matter, Baryon number, inflatonの起源, etc.

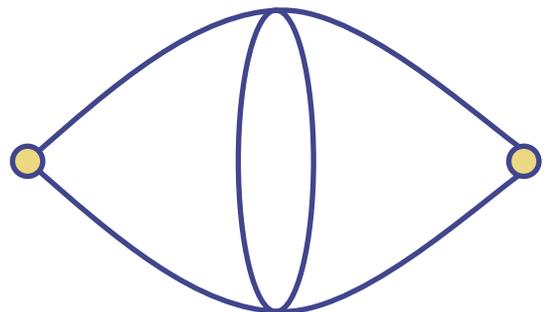
更に、検証可能なpredictionがあれば申し分ない。

他方、4次元のeffective theoryの範囲ではかなり調べられているが、宇宙項のfine tuningを避けるideaはひとつも成功していない

高次元重力に活路を見いだそうという試み  
別の方向性としてはLorentz violation

# 6次元 braneworld モデルにおける self-tuning

(おそらく失敗例)



余剰次元が2次元

主張: brane上に導入されたc.c.を打ち消すようにdeficit angleが変更される。

「宇宙項は4次元を曲げるためではなく余次元を曲げる為に使われる。」

反論: 本当は特別なdeficit angleにtuningしたときにc.c.が打ち消されるだけで、c.c.にあわせてadjustされるわけではなかった。

Garriga & Porrati ('04)

次なる主張: 単純なモデルはだめだけど  
supersymmetricなモデルはうまくいく。

反論: 見事にWeinbergの“**No-go theorem**” ('89)に抵触してしまっている。

Garriga & Porrati ('04)

tuning mechanismを対称性に求めるとpotentialとして

$$V = e^{-\alpha\sigma} \tilde{V}(\phi_i) \text{ が得られてしまう。}$$

fine tuning 無しに $V=0$ になるのは $\sigma \rightarrow \infty$ 。

このときには全てのcouplingが0の不毛な理論になってしまう。

# Dvali-Gabadadze-Porrati model

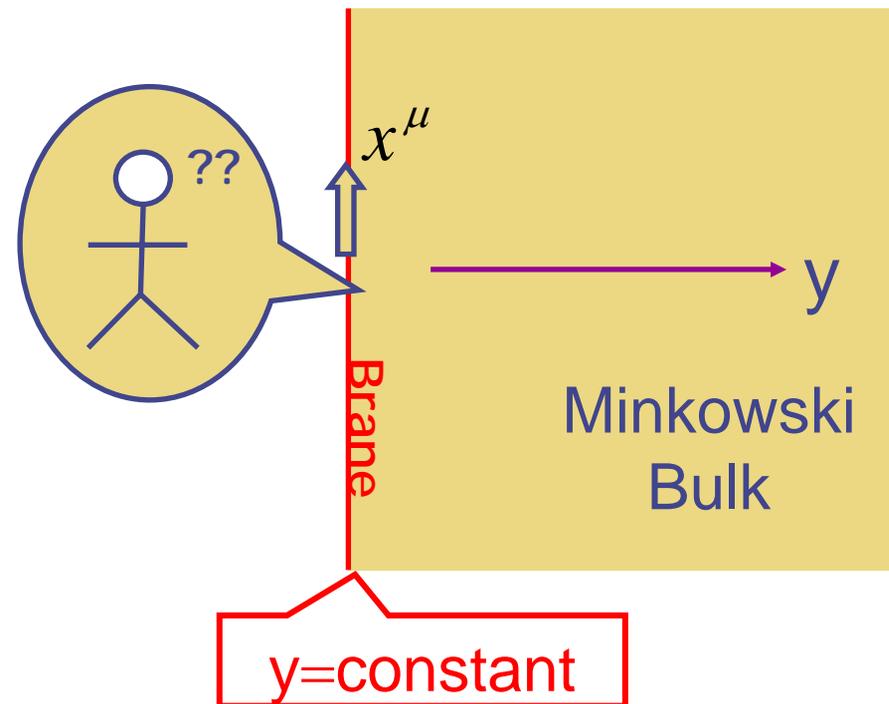
(Phys. Lett. **B485**, 208 (2000))

- 4次元のEinstein-Hilbert作用を加えたbraneworldのモデル

$$S = M_5^3 \int d^5x \sqrt{g} R + \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} (M_4^2 R^{(4)} + L_{\text{matt}})$$

$$M_5^3 = M_4^2 / 2r_c$$

Critical length scaleが存在



- Bulkは無限に広がっているが、 $r < r_c$ では4次元の項が効いて重力は4次元になる。逆に、長波長では5次元の。
- 線形解析からは4次元のEinstein gravityではなく $\omega = 0$ 注のBrans-Dicke理論のようにふるまう。  
即ち、光の曲がり角が25%小さい。
- ところが、非線形効果が効いて、Einstein gravityからのずれが小さくとどまるという不思議な性質がある。

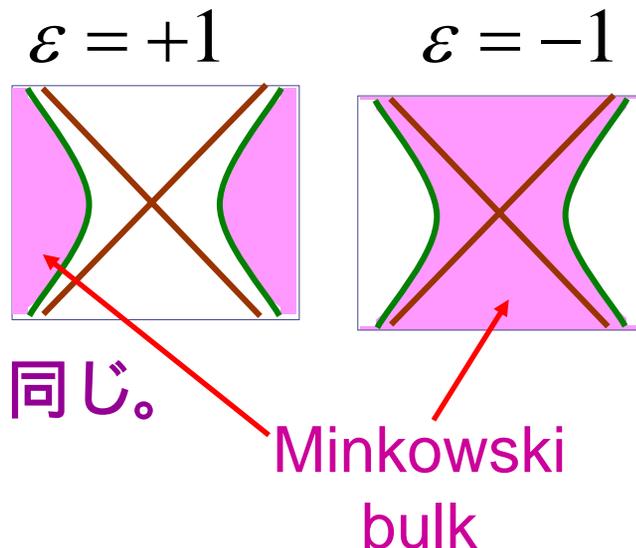
注) 千葉君に間違いを指摘してもらい修正しました。

# DGP modelの宇宙論

- 変更された Friedmann eq.

$$\frac{1}{3M_4^2} \rho = H^2 - \varepsilon r_c H$$

$\varepsilon$  の正負に対応した二つのブランチが存在



- 宇宙初期  $H \gg r_c^{-1}$  では普通と同じ。

- 後の時刻でブランチ間の差が出る

$\varepsilon = +1$  のブランチでは  $\rho \rightarrow 0$  の極限で

$$H \rightarrow r_c^{-1} \quad \text{self-acceleration}$$

Deffayet ('01)

# DGP modelのpathology

- 線形では4次元Einstein重力と異なるが、非線形効果で4次元Einstein重力に近いものが出現する。

- Veinstein機構      Porrati ('02), Gruzinov('05), Tanaka ('04) etc.
- 4次元の理論にreductionしたとき、Kulza-Klein tower にmassless gravitonが含まれていない。
- massive gravitonのつくるmetric perturbation

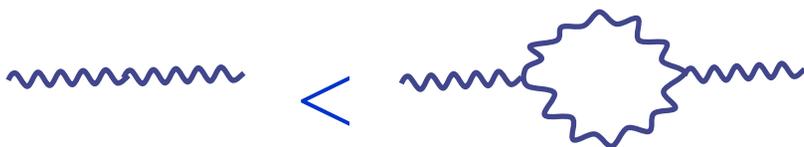
$$\delta g_{\mu\nu} \propto \frac{1}{+m^2} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} g_{\mu\nu} T \right)$$

1/2と違うのでmassless極限でも一般相対論からずれる  
van Dam-Veltman-Zakharov discontinuity

- 理論がプランク長よりずっと長い波長( $r_c^2 |_{pl}$ )<sup>1/3</sup> ~ 1000kmで強結合になる。

- 強結合 = loop補正が大きくなり無視できなくなる。

Luty, Porrati & Rattazzi ('03)

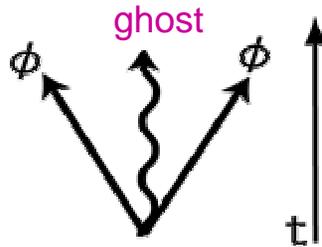


# DGP modelのpathology

- self-acceleration ブランチではghostが出現する。
  - ghost = 逆符号で作用関数に入ってくる粒子、負のエネルギーを持つ

$$S_{\text{normal}} = \int -(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \qquad S_{\text{ghost}} = \int (\nabla\phi)^2 + V(\phi)$$

- ghostとnormalな粒子の対生成が爆発的に起きて理論として破綻！？



話せば長いことながら、  
このghostは普通のghostとは少し違う

Luty, Porrati & Rattazzi ('03), Nicoils & Rattazzi('04), Charmousis et al ('06)  
Gorbunov, Koyama & Sibiryakov ('05), Izumi et al hep-th/0610282

- staticな星のまわりの摂動を考えると、超光速で伝播するモードが存在する。

「単純な4次元effective theoryになってしまうのでは、今までと同じ、少々のおかしなことはむしろ必要。」

# まとめ

- ブレーンワールドに端を発して高次元重力に関する知識は爆発的に増えた。
- 特に、高次元重力の直感的理解に必要な基礎が少しずつではあるができてきている。
  - 主としてブレーンがないただの高次元重力や、ブレーンを含めた系では一様等方宇宙と線形摂動
  - 明らかにブレーンを伴う系における非線形重力に関してはわかってないことが多い。
- 更に、次にどのような展開が待っているかなかなか予想がつかない。
  - 個人的には、細かいことをやっているように見えても、別の大きな問題と繋がっているということがありそうな予感がする。