

# 重力レンズ理論の現状

富田憲二

京都大学 基礎物理学研究所

## Abstract

まず、重力レンズ現象の解析のための基礎的關係式であるレンズ方程式の宇宙論における意義および、宇宙論的レンズ現象の3通りの解析法について述べる。その上で、弱いレンズ効果として cosmic shear と CMB 非等方性の変形、強いレンズ効果として、time-delay, QSO レンズ統計を取り上げ、それらの現状を紹介する。

## 1 はじめに

光学的観測やX線観測が電磁波の発生源(光源)を検出し、その性質を探るのに対し、重力レンズによる観測は、重力による光像変形を通して行われるので、光源とともに、変形の源となるレンズ物体の存在と質量分布を調べることができる。レンズ物体は電磁波を出している必要はないので、その候補として、ダークマターの塊、ダークハローのようなものが考えられる。したがって、光学的観測からえられない別の貴重な(宇宙に関する)情報が重力レンズ観測から導かれる。

重力レンズ現象を記述する上で、最も基礎的な関係式は、レンズ方程式である。まず、これの宇宙論における意義について考え、次に、宇宙論的レンズ現象における3通りの解析法を概観する。これらの解析の応用として、星状天体をレンズとするマイクロレンズ現象、銀河、銀河団をレンズとするアーク、アークレット、リング、QSOの多重像、time-delayなどの光像変形をもつ強いレンズ現象、さらに、大規模構造をレンズとする cosmic shear や宇宙背景放射(CMB)の非等方性の変形などの弱いレンズ現象がある。マイクロレンズ現象と銀河団のレンズ現象は、それぞれ、西、服部さんのレビュー講演にたくし、ここでは、基礎的な項目と応用の残りの項目について解説することにしよう。しかし、紙面の制限上、記述をところどころ簡略化したので、参考文献で補ってもらいたい。

## 2 宇宙論的レンズ方程式

### a. 光線とレンズ方程式

レンズ方程式は、Fig. 1に示した(光源面上の)ベクトル  $\vec{\eta}$ 、(レンズ面上の)ベクトル  $\vec{\xi}$ 、(レンズ物体による)曲がり角ベクトル  $\vec{\alpha}_1$  を用いると、幾何学的考察から

$$\vec{\eta} = (D_s/D_l)\vec{\xi} - D_{ls}\vec{\alpha}_1 \quad (1)$$

の關係が導かれる。ここで、 $D_s, D_l, D_{ls}$  は、それぞれ観測者と光源、観測者とレンズ物体、レンズ物体と光源の間の角直径距離である。 $\vec{\alpha}_1$  は、レンズ面上の表面質量密度を  $\Sigma(\vec{\xi})$  とするとき

$$\vec{\alpha}_1 = \frac{4G}{c^2} \int d\vec{\xi}' \Sigma(\vec{\xi}') (\vec{\xi} - \vec{\xi}') / |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2 \quad (2)$$

角度  $\vec{\beta}(=\vec{\eta}/D_s)$ 、 $\vec{\theta}(=\vec{\xi}/D_l)$ 、 $\vec{\alpha}(=\vec{\alpha}_1 D_{ls}/D_s)$  を使うと上式は

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\theta) \quad (3)$$

となり、

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\pi} \int d\bar{\theta} \kappa(\theta) (\theta - \theta') / |\theta - \theta'|^2 \quad (4)$$

ここで無次元表面密度  $\kappa(\theta)$  は

$$\kappa(\theta) = \Sigma / \Sigma_{cr}, \quad \Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_l D_{ls}} \quad (5)$$

で定義される。

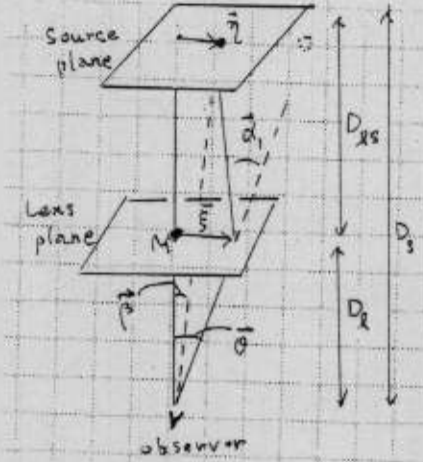


Fig. 1

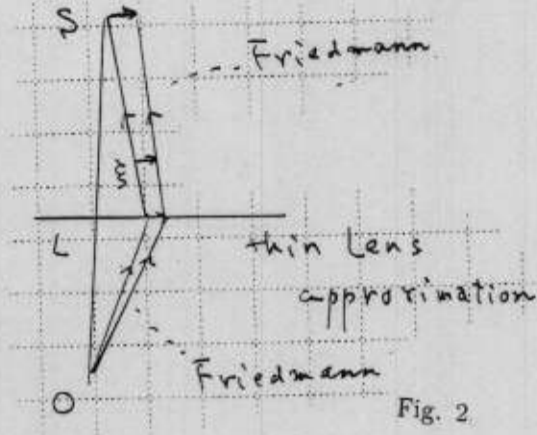


Fig. 2

上のレンズ方程式は、理想的な一様等方的宇宙の中で、レンズ物体が、光線の変えるだけの働きをするという仮定のもとに導かれた。現実の宇宙は非一様なので、このレンズ方程式が成り立つという保証はない。非一様ならば、光線は幾何学近似のもとに、ゼロ測地線 (null-geodesic) の式

$$k^\mu k^\nu = 0, \quad k^\mu \equiv dx^\mu / dv \quad (6)$$

を解くことによって定められる。ここで、 $k^\mu$  は 4 次元波動ベクトル、 $v$  は アフィン・パラメーター。

また、光線束の状態は、結合ベクトルの式、または、geodesic deviation の式を解くことによって定められる。そして、レンズ方程式は、結合ベクトル  $\xi(v)$  の光線に沿った変化としてとらえられる。 $\xi(v) = D(v)\bar{\theta}$  とおくと。結合ベクトルの式から、行列  $D$  は

$$d^2 D / dv^2 = T D \quad (7)$$

の関係をみだし、行列  $T$  は、ニュートン近似の非一様宇宙モデルでは

$$T_{ij} = -\frac{3}{2} \left( \frac{H_0}{c} \right)^2 \Omega_0 (1+z)^5 \delta_{ij} \left( 1 + \frac{\delta\rho}{\rho} \right) - \frac{(1+z)^2}{c^2} (2\Phi_{,ij} + \delta_{ij} \Phi_{,33}) \quad (8)$$

となる。ここで、 $\Phi$  は ニュートン・ポテンシャル、 $\delta\rho/\rho$  は物質の密度揺らぎ、 $x^i, x^j$  は、3次元空間座標、光線の方向を  $x^3$  方向とした。(8) の第1項は、物質の質量分布による Ricci focusing, 第2項は、光線束の shear の影響を表している。 $D$  は、角直径距離に当る量であるが、一般に方向によって異なる。とくに、shear が小さくてゼロと見なせる場合には、 $I$  を単位行列とすると、 $D = D_A I$  と表され、 $D_A$  は、通常の角直径距離となる。なお、 $D_A$  は、光度距離  $D_L$  に  $D_L = (1+z)^2 D_A$  によって関係づけられる。

レンズ物体の近くでは、その重力場によって、光線の方向と結合ベクトルの大きさが変化する。レンズ面近傍で急激の変化すると仮定する「thin lens 近似」のもとに、理想的な (レンズ面の外では物質分布が一様

で shear が無視できるという) 場合に、上記のレンズ方程式が導けることが厳密に示されている (M. Sasaki 1993)。一般的には、レンズ方程式が成り立つことは保証されていないが、shear の影響は多くの場合、非常に小さいので、近似的には、レンズ方程式が成り立つと考えられている。

#### b. Fermat 原理

レンズ効果によって、光線が曲げられると、光源から観測者までの間の時間は、Fig. 2 のように、幾何学的に長くなる以外に、重力的にも長くなる (赤方偏移)。その変化量の和は

$$\Delta t = (1 + z_l) \frac{D_l D_s}{D_{ls}} \left[ \frac{1}{2} (\vec{\theta} - \vec{\beta})^2 - \Psi \right] \quad (9)$$

と表される。ここで、 $\Psi$  は、deflection ポテンシャル とよばれ

$$\Psi \equiv \frac{1}{\pi} \int d\theta'^2 \kappa(\theta') \ln \frac{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|}{\theta_c} \quad (10)$$

であたえられる。 $\theta_c$  はレンズ面の特徴的角、 $z_l$  はレンズ面での redshift、「...」の中の第1、2項は、それぞれ、幾何学的、重力的変化である。Fermat の原理を適用して、 $\Delta t$  の変分をゼロにすると、レンズ方程式が導かれる (Blandford & Narayan 1986)。レンズ効果による多重像では、同じ光源と観測者に対して、2つ以上の光線があるので、それぞれに異なった  $\Delta t$  がある。それらの2つの差  $|\Delta t_{(1)} - \Delta t_{(2)}|$  は、time-delay とよばれ、重要な観測量となっている。

#### c. 光線束の特徴的な量

deflection ポテンシャル  $\Psi$  は

$$\vec{\alpha} = \nabla_{\theta} \Psi, \quad \nabla_{\theta}^2 \Psi = 2\kappa \quad (11)$$

の関係をみだし、 $\vec{\beta}$  と  $\vec{\theta}$  の間の変換行列は、レンズ方程式から

$$\mathcal{A} \equiv \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}} = \left( \delta_{ij} - \Psi_{,ij} \right) \quad (12)$$

となる。この行列の要素は光線束のゆがみ shear ( $\gamma \equiv \gamma_1 + i\gamma_2$ ) に対して

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ \gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{bmatrix}$$

によって関係付けられる。また、光の明るさの増幅 amplification は

$$\mu = 1/\det(\mathcal{A}) = 1/[(1 - \kappa)^2 - |\gamma|^2] \quad (13)$$

によって表される。分母がゼロのとき、 $\mu$  は無限大となるが、 $\mu \rightarrow \infty$  の領域は、レンズ面上、光源面上で、それぞれ、critical curves, caustics (焦点) とよばれる。

### 3 宇宙論的レンズ効果の解析

3通りの解析方法が使われているので、それぞれについて簡単に紹介する (文献 [6],[8] 参照)。

#### a. 直接積分法

レンズ方程式は、非一様性により適用できない可能性があるため、ゼロ測地線の式、または、geodesic deviation の式を直接解く方法。数値的に (N 体シミュレーションなどにより) 導いた非一様な物質分布のなかで、多くの光線束を作り、角直径距離  $D_A$ 、 $\gamma$ 、 $\mu$ などを求める。これにより、角直径距離  $D_A$  の (一

様等方モデルの角直径距離  $\bar{D}_A$  からの) ずれ ( $\delta D_A$ ),  $\gamma, \mu$  の分布が調べられ、非ガウスの振舞いが現れることが分った (Tomita & Watanabe 1989, Tomita 1999, Wald & Holz 1998)。

b. 多レンズ面 (Multi-lens-plane) 法

数値的に導いた 非一様な物質分布を、有限個のレンズ面 ( $n$  面) に (人工的に) 分割し、光線へのレンズ効果を、個々のレンズ面からの寄与の和として求める。それぞれの寄与は、レンズ方程式を使って計算される:  $\gamma_{\text{total}} = \sum_n \gamma_n, \mu_{\text{total}} - 1 = \sum_n (\mu_n - 1)$ 。角直径距離は背景の一樣なものが使われる (Schneider & Weiss 1988, Wambsganss et al. 1998, Premadi et al. 1999)。この方法は扱いやすいので多用されている。近似による人工的な回転が表れるという欠点があるが、面の数を増やせば精度はあげられる。

c. 摂動的取扱

背景時空の計量を

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + \sigma^2(\chi)d\Omega^2] \quad (14)$$

とおく。結合ベクトルを、 $\vec{x} = \vec{\xi}/a(t) = D\theta/a(t)$  とおくと、(7) 式から

$$\frac{d^2 \vec{x}}{d\chi^2} + K\vec{x} = -\frac{2}{c^2} \Delta \left\{ \nabla_{\perp} \Phi(\vec{k}, \chi) \right\} \quad (15)$$

ここで、 $\nabla_{\perp}$  は光線に垂直方向の勾配、 $K$  は空間曲率 (1, 0, -1)。この式はレンズ効果が小さい場合 (weak lensing)、逐次近似で解くことができる。第 0 近似で  $\vec{x} = \sigma(\chi)\vec{\theta}$ 、第 1 近似で

$$\vec{\alpha} \equiv \frac{\sigma(\chi)\vec{\theta} - \vec{x}}{\sigma(\chi)} = \frac{2}{c^2} \int_0^{\chi} d\chi' \frac{\sigma(\chi - \chi')}{\sigma(\chi)} \nabla_{\perp} \Phi[\sigma(\chi)\vec{\theta}, \chi] \quad (16)$$

これを使って  $\kappa(\theta) [= \frac{1}{2} \partial \alpha_i / \partial \theta_i]$  が求められ、さらに (10) - (13) 式を使って、 $\gamma$  と  $\mu$  が計算される。大規模構造による weak lensing の場合、この取り扱いは有効で便利である (文献 [4] 参照)。

## 4 Cosmic shear と CMB

a. Cosmic shear

大規模構造による weak lensing については、§3 の 3 通りの方法のいずれからも調べることができるが、摂動的取扱が角度相関を求める上で最も簡単なので多く使われている。角度  $\theta$  が大きいときは、いずれの方法でも一致するが、小さい角度では、非摂動的効果が効いてくるのでずれてくる。Fig. 3 は、理論的な  $\gamma$  の分散 ( $\gamma^2$ ) の角度依存性と最近の観測結果を示している (astro-ph/0008179)。観測グループの名前は、VLT: Very Large Telescope (ESO, La Silla)、CFHT: Canada-France-Hawaii Telescope, WHT: William Hershell Telescope (4.2m), CTIO: Cerro Tololo Inter-American Observatory (4 m Blanco Telescope)。

b. 宇宙背景輻射 (CMB) の非等方性

輻射温度の平均値 ( $T$ ) と、 $\vec{\theta}$  方向の温度のずれ  $\Delta T$  との比  $\tau(\theta) \equiv \Delta T / \langle T \rangle$  の角度相関は、レンズ効果がなければ

$$\xi_T(\phi) = \langle \tau(\vec{\theta}) \tau(\vec{\theta} + \vec{\phi}) \rangle \quad (17)$$

と表される。レンズ効果があると、 $\vec{\theta}$  は  $\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta})$  で置きかえられ、相関は

$$\xi_T(\phi) = \langle \tau(\vec{\theta} - \vec{\alpha}) \tau[\vec{\theta} + \vec{\phi} - \vec{\alpha}(\vec{\theta} + \vec{\phi})] \rangle \quad (18)$$

となる。温度揺らぎの power spectrum を  $P_T$  とすると

$$\xi_T(\phi) = \int_0^{\infty} \frac{l dl}{2\pi} P_T(l) \langle \exp[i\vec{l}(\vec{\alpha} - \vec{\alpha}')] \rangle J_0(l\phi) \quad (19)$$

Gaussian random fluctuation を仮定すると ( ) の部分は、 $\exp[-\frac{1}{2}l^2\sigma^2(\phi)]$  に帰着する (M. Sasaki 1989)。ここで、 $\sigma^2(\phi) \equiv \langle (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}')^2 \rangle$ 。Tomita & Watanabe (1989) は直接積分法で  $\xi_T'(\phi)$  を求めたが、現在では、多くの場合、上記の摂動的取扱いで計算される。

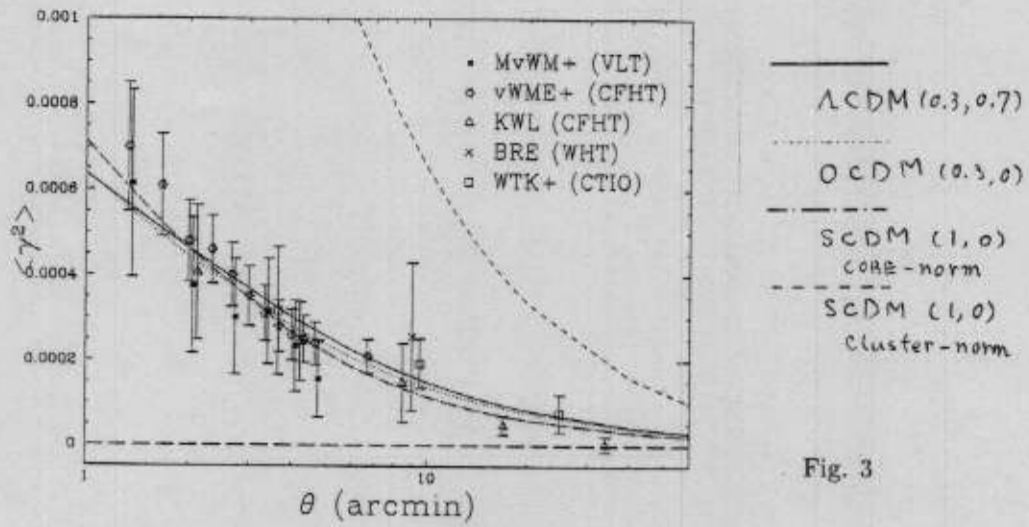


Fig. 3

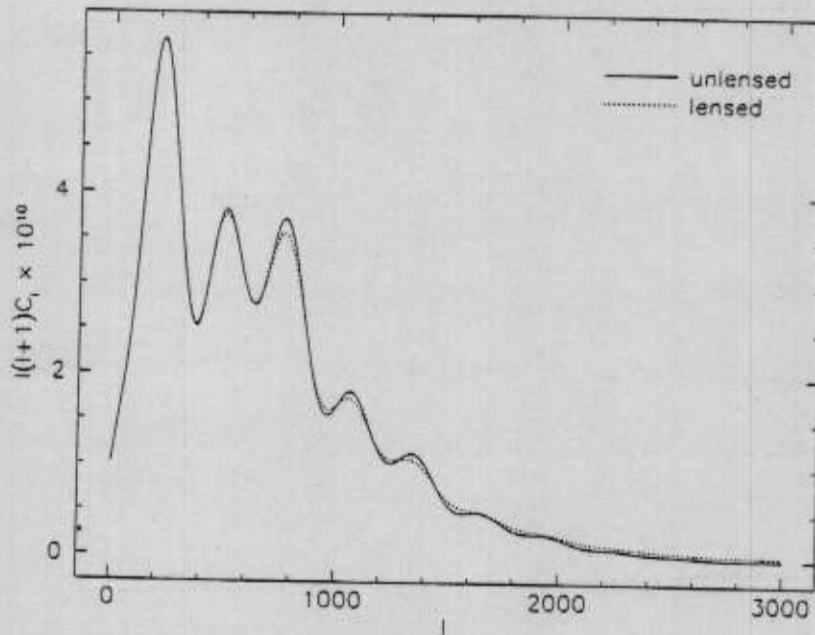


Fig. 4

$\xi_T'(\phi)$  と  $\xi_T(\phi)$  の間の関係は

$$\xi_T'(\phi) = \int \phi' d\phi' \xi_T(\phi') K(\phi, \phi') \quad (20)$$

ここで、

$$K(\phi, \phi') \equiv \frac{1}{\sigma^2(\phi)} \exp\left[-\frac{\phi^2 + \phi'^2}{2\sigma^2(\phi)}\right] I_0\left[\frac{\phi\phi'}{\sigma^2(\phi)}\right] \quad (21)$$

は、角度についての smoothing の効果を表している。

$\tau(\vec{\theta})$  の harmonics での展開を

$$\tau(\vec{\theta}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (22)$$

とすると、角度相関は

$$C_l \equiv \langle |a_{lm}|^2 \rangle = \int_0^\pi d\phi \sin\phi P_l(\cos\phi) \xi_T(\phi) \quad (23)$$

によって表される。Fig. 4 には、レンズ効果なしの場合 (実線) の  $C_l$  とレンズ効果による smoothing が効いた場合 (点線) が示されている。この差は、 $l > 500$  で現れ、 $l > 2000$  では、ずれが大きいことに注目。

最近の研究としては、CMB の polarization の研究 (Seljack & Zaldarriaga 1998)、Topology の研究 (Matsubara & Jain 2000)、など、多くの研究がある。

## 5 強いレンズ効果

### a. Time-delay

角直径距離を  $D_l = (c/H_0)d_A(0, z_l)$ ,  $D_s = (c/H_0)d_A(0, z_s)$ ,  $D_{ls} = (c/H_0)d_A(z_l, z_s)$  とおくと、 $d_A$  は宇宙モデル・パラメータのみで定まる。(9) 式から

$$H_0 \Delta t = (1 + z_l) \frac{d_A(0, z_l) d_s(0, z_s)}{d_A(z_l, z_s)} \left[ \frac{1}{2} (\bar{\theta} - \bar{\beta})^2 - \Psi \right] \quad (24)$$

となり、[...] の部分のみがレンズ物体のモデルで定まる。そこで、宇宙モデルと最良のレンズモデルを指定すると、 $\Delta t$  の差の観測から Hubble 定数  $H_0$  が定まることになる。この方法による  $H_0$  の最初の測定は、QSO (0957+561) に対してなされ、 $\Delta t$  の差 = 417 ± 3 days が得られた。しかし、このレンズ物体が銀河団のなかの銀河で、複雑な構造をしているので、レンズモデルが確定せず  $H_0$  の値も、64 ± 13 km s<sup>-1</sup> Mpc<sup>-1</sup> (Kundic et al, 1997), 77 ± 25 km s<sup>-1</sup> Mpc<sup>-1</sup> (Bernstein & Fisher, 1999) のように、ぐらついている。

これ以外に、レンズ物体の構造がより簡単であると見なされている QSO として、PG1115+080 ( $z_l = 0.29, z_s = 1.722$ ) がある。この場合、 $\Delta t$  の差は、4 個の像 (A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, B, C) のうち、B, C について 25.0 days となり、多くの人によって  $H_0$  が測定され、中心値が 44 - 53 km s<sup>-1</sup> Mpc<sup>-1</sup> の間にある。最近の Tada & Futamase (2000) によると、2 つのレンズモデルについて、中心値が 46.7, 50.3 となっている。これ以外に、B1608+656, B1600+434, B0218+357, PKS1830-211 などの多重 QSO に対する  $H_0$  の測定がなされているが、大体 60 km s<sup>-1</sup> Mpc<sup>-1</sup> 程度の値を持ち、我々の近傍での値 (72) より小さい。しかし現状では、error bar が大きく、宇宙モデルにもよるので、 $H_0$  の値が非一様かどうかを結論づけるのは難しい。

### b. QSO レンズ統計

high  $z$  の QSO のカタログの中に現れる多重 QSO (多重像を持った QSO) の割合を統計的に調べることが、TOG (Turner, Ostriker, & Gott III) の先駆的研究 (1984) 以来、Fukugita & Turner (1991) の仕事を経て、なされてきた。光源としての QSO が、レンズ物体の critical curve 内に入ったとき、多重像が作られるので、その断面積は、critical curve 内の面積となる。レンズ物体として、球状の銀河を考えると、面積は半径 (Einstein 半径)  $r_E$  をつかって、 $\pi(r_E)^2$  である。そこで、時刻  $t_s$  の光源が現在  $t_0$  に多重像として見える事象の optical depth  $\tau$  は

$$\tau(z_s) = \int_{t_s}^{t_0} n \pi [r_E(t_l)]^2 c dt_l = F f(z_s, \Omega_0, \lambda_0) \quad (25)$$

ここで、 $f$  は光源 (個数密度  $n$ ) の redshift  $z_s$  とモデル・パラメータで定まり、係数  $F$  は、TOG パラメータとよばれ、レンズモデルとレンズの個数分布を指定するとき定まる。Fukugita & Turner (1991) はレンズ銀河を singular isothermal sphere として求め、 $F = 0.047$  の値を得た。

$\tau(z_s)$  が分ると、( $N$  個の QSO を含む) カタログ内に、何個の多重 QSO があるかの期待値  $N_{theor}$  を求めることができる。ただし、個々の QSO の redshift  $z_i$  に対し単に  $\sum_{i=1}^N \tau(z_i)$  の和をとったのでは正しくない。その理由は、ある QSO が多重 QSO であった場合、レンズ効果によって、光度  $L$  は (因子  $\mu$  だけ)

明るくなっており、もとの光源の光度は  $L/\mu$  である。そして、暗い QSO の数は光度の現象とともに増大する。そこで、光度関数を  $\Phi(L)$  としたとき、次の因子だけ数が多くなる。

$$B(L) = \int_0^{\theta_m} \Phi(L/\mu) 2\pi\theta d\theta / \Phi(L) \quad (26)$$

これを、増幅バイアスとよぶ。ここで、 $\mu$  は  $\theta$  の関数で、 $\theta_m$  は Einstein 半径に対応する角度である。そして、求める期待値は

$$N_{theor} = \sum_{i=1}^N \tau(z_i) B(L_i) \quad (27)$$

Maos et al (1993) は、HST の観測によるカタログにおいて、 $N = 504$  個の QSO の中で、4 個の多重 QSO を見つけた。一方、 $N_{theor}$  は宇宙モデルによって異なり、Einstein-de Sitter モデルの場合が最も近く (3.3 個)、 $(\Omega_0, \lambda_0) = (0.3, 0.7)$  の低密度平坦モデルでは、 $\sim 10$  個となって、一致しないという結果が得られた。Kochanek (1996) も同様の結果を導き、モデル・パラメータへの制限として、 $\lambda_0 < 0.6$  を導いた。しかし、最近 M. Chiba et al. (1999) は、銀河の光度関数を改良することにより、 $F$  の値が変り、 $N_{theor}$  と観測値との一致は、むしろ (0.3, 0.7) のモデルの場合に得られることを示した (文献 [7] 参照)。したがって、レンズのモデルと銀河個数分布のモデルが結果に大きくひびくことが気になるものの、他の宇宙論的観測の場合と同じ傾向のあることが分った。

## 6 おわりに

1. 3つの解析法にそれぞれの長所、短所があり、それぞれの方法を用いた研究の発展が必要。
2. レンズモデルに注意が必要。time-delay, QSO レンズ統計において、レンズモデルの取り方によって、結果がかなり異なってくる。cosmic shear についても、小角度では、discrete なレンズ効果が効いてくるため、レンズモデルの取り方が問題になる。また、QSO レンズ統計、cosmic shear では、レンズ物体の分布 (質量関数) も重要な factor である。
3. 重力レンズは Dark Matter Telescope としての今後の発展の余地が大きい。Subaru telescope での研究に、頑張ってもらいたい。

## 参考文献

- [1] P. Schneider, J. Ehler, & E.E. Falco, *Gravitational Lenses* (Schpringer Verlag, 1992)
- [2] R. Blandford & R. Narayan, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **30** (1992), 311 -58
- [3] S. Refsdal & J. Surdej, *Rep. Prog. Phys.* **56** (1994) 117
- [4] M. Bartelmann & P. Schneider, *Physics Report* (astro-ph/9912508)
- [5] Y. Mellier, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **37** (1999), 127
- [6] K. Tomita, P. Premadi, & T.T. Nakamura, *Prog. Theor. Phys. Supple. No.* **133** (1999) 85
- [7] M. Chiba & T. Futamase, *Prog. Theor. Phys. Supple. No.* **133** (1999) 115
- [8] K. Tomita, H. Asada, & T. Hamana, *Prog. Theor. Phys. Supple. No.* **133** (1999) 155