数値的相対論

柴田　大 (東京大学・大学院総合文化研究科)

1　はじめに

一般相対論的数値シミュレーション (数値的相対論) の重要性はこれまでになく増している。というのも、キロメートルサイズのレーザー干渉計による重力波検出実験がいよいよ始まったからである [1, 2]。重力波を直接検出したり、また検出した重力波がどのような天体から放出されているのかを理解するには、理論家が精度の良い波形のテンプレートを用意する必要がある [3]。合体途中にある連星中性子星、連星ブラックホールのように、ポストニュートン近似を用いて解析的に精度の良いテンプレートの構築が可能な現象も存在するが [4]、それらは例外で、多くの現象 (例えば、連星中性子星の合体、連星ブラックホールの合体、重い恒星の核の重力崩壊、中性子星の非軸対称変形) に対しては、数値的相対論によってのみテンプレートの構築が可能となる。したがって、数値的相対論は重力波検出計画において大変重要な役割を担う。

数値的相対論が重要性を増したもう１つの理由として、一般相対論的かつダイナミカルな天体現象に対する観測が飛躍的に発展を遂げたことが挙げられる。例えば最近、ハイパーノバと呼ばれる高光度の超新星現象がたびたび報告されるようになったが、この現象には、ブラックホール形成が伴っているとするモデルが有力である [5]。また、γ 線バーストは宇宙論的距離で発生していて、その短寿命の中心源は恒星サイズの質量のブラックホールとディスクからなっていると考えられているが [6]、その中心源を一時的に誕生させる現象として連星中性子星の合体や大質量星の重力崩壊が候補とされている [7, 8]。これらの仮説を理論的に実証するには、シミュレーションを実行するほかない。ブラックホールが形成される現象なので、数値的相対論が必要不可欠になる。

以上述べたような需要を予想して、 1990 年代前半から数値的相対論に関する研究がアメリカ、ヨーロッパ、日本などでこれまでになく盛んになった [9]。アメリカやヨーロッパでは、数値的相対論の発展のために理論としてはかなりの額の投資が行われており、人材の育成や強力な計算コードの構築が進められている。日本においても、筆者らの研究グループによって理論的、技術的発展が成し遂げられ、また国立天文台に宇宙物理学者・理論天文学者用のスーパーコンピュータが導入されたおかげで、大規模な数値シミュレーションが可能になった。その結果、世界最先端の研究成果をここ数年発表している (例えば、[10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17])。そこで本稿においては、数値的相対論は現在どの程度のレベルに到達しているのか、そして今後どのような課題を解決する必要があるのか、などについて簡単に解説する。具体的に解くべき数式や我々の最近の研究成果に関しては、上記参考論文を参照されたい。また、球対称シミュレーション法に関してはおよそ解決済みなので、ここでは取り扱わない。ところで、計量を固定したシミュレーション (ブラックホール周りの降着円盤のシミュレーションにたびたび見られる類) は、技術的にはニュートン重力のシミュレーションと変わりがない (やや複雑ではあるが)。よって、数値的相対論の範疇に含めるべきではないと考えるので、ここでは解説しない。

2　数値的相対論において解決すべき課題の一般論

この節では、数値的相対論において必要となる計算コードおよび克服すべき課題についての一般論を述べる。

数値的相対論に限らずどんなシミュレーションを実行するにあたっても同様であるが、現実的な初期条件を設定する必要がある。特に、正確な重力波のテンプレートを構築したり、一般相対論的現象に対する定量的な理解を得たりするには、これが必要不可欠となる。例えば合体直前にある連星中性子星や連星ブラックホールは、重力波放出をしながら軌道半径を徐々に縮めていくが、その放出時間スケールは軌道周期に比べて十分に長い。したがって、回転系で見ればほぼ平衡状態にあると考えることができるので、そのような初

期条件を与える必要がある。

次に、重力場の発展方程式、つまりアインシュタイン方程式の発展方程式を解く計算コードが必要である。アインシュタイン方程式は、そもそも時間と空間を区別しないで書かれた方程式なので、これを発展方程式の形に書き直す作業が必要である。つまり、まず第一に定式化を確立しなくてはならない。またアインシュタイン方程式は基本的には連立非線形の双曲型方程式であり、ニュートン重力の場合の方程式 (線形のポアッソン方程式が 1 つのみ) とは全く異なる。非線形波動方程式を解くことになるので、数値計算を安定かつ精度良く行なうための様々な未知の技術を開発していく必要がある。

中性子星のような天体の運動を取り扱う場合には、相対論的流体力学の方程式も解かなくてはならない。もっともこれは、ニュートンの重力理論での方程式と大差ないので、すでに開発済みのさまざまな技法 (例えば衝撃波高分解スキーム [18]) がそのまま使用できる。流体方程式を解くにあたっては、状態方程式を設定したり、現実的物理過程を考慮する必要があるが、 (多次元の) 一般相対論的計算においてはむしろこれらが十分に研究されていない。現実的計算にはこれらを考慮することが必要不可欠だが、これまでの研究において全く考慮されていない。今後の課題である。

ところで、数値的相対論がニュートン重力下でのシミュレーションと決定的に異なる点は、座標条件を適切に選ぶ必要がある、という点である。ニュートン理論においては、絶対時間の存在を仮定しており、また空間は絶対時間と直交することが前提となっているので、時間座標軸の方向や空間面の取り方を決定する必要はない。一方、一般相対論は共変的な理論なので、それらの決め方に自由度が存在する。つまりゲージを選ぶ自由度が存在する。シミュレーションを行うには何らかの座標を設定しなくてはならないので、ゲージを固定しなくてはならない。このゲージ選択の問題は、空間的、時間的対称性のない時空に対してはとりわけ難しい。軸対称定常な時空のように対称性がある時空に対しては、カーブラックホール解のような既知の解が存在しており、その解の座標変換などを実行して調べることによってゲージの良し悪しがある程度把握出来る。しかし対称性が全くない時空では、そのような都合の良い解が存在しない。そのため、大雑把には理論的に推測できても、具体的な数値実験なしにはゲージ条件の良し悪しの完全な理解は難しい。いいかげんにゲージを選んでしまうと、隣接する時間軸同士が交差したり、あるいは空間座標軸が捻れてしまって座標特異点を作ったり (図 1 参照)、またブラックホールのように特異点を持つ時空が形成されたときに、空間面が特異点にぶつかって計算が破綻したりする (図 2 参照)。これらの問題を回避するような優れたゲージ条件を、理論的考察および数値実験により発見していかなければならない。

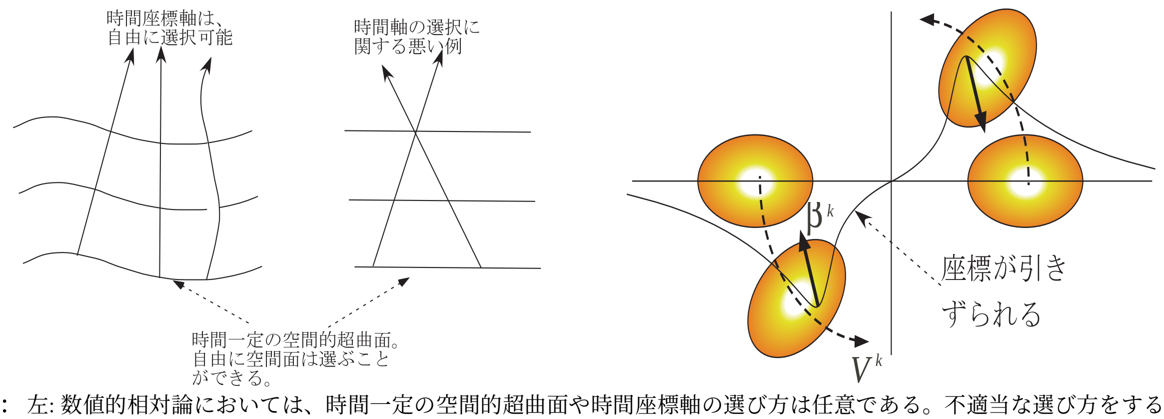

図 1: 左: 数値的相対論においては、時間一定の空間的超曲面や時間座標軸の選び方は任意である。不適当な選び方をすると、計算が破綻する。右: 連星のように角運動量を持つ系では、座標系の引きずりが発生する。座標系の引きずりが、数値計算に大きなダメージを与えないように、ゲージ条件を巧みに選択する必要がある。

以上、 (i) 現実的初期条件の設定、 (ii) 重力場の発展方程式を解くための計算コード、 (iii) 相対論的流体方程式を解くための計算コード、および (iv) ゲージ条件の決定が数値的相対論における必要不可欠な基本要素だが、これ以外にもいくつかの必需品がある。以下では、それらについて述べる。

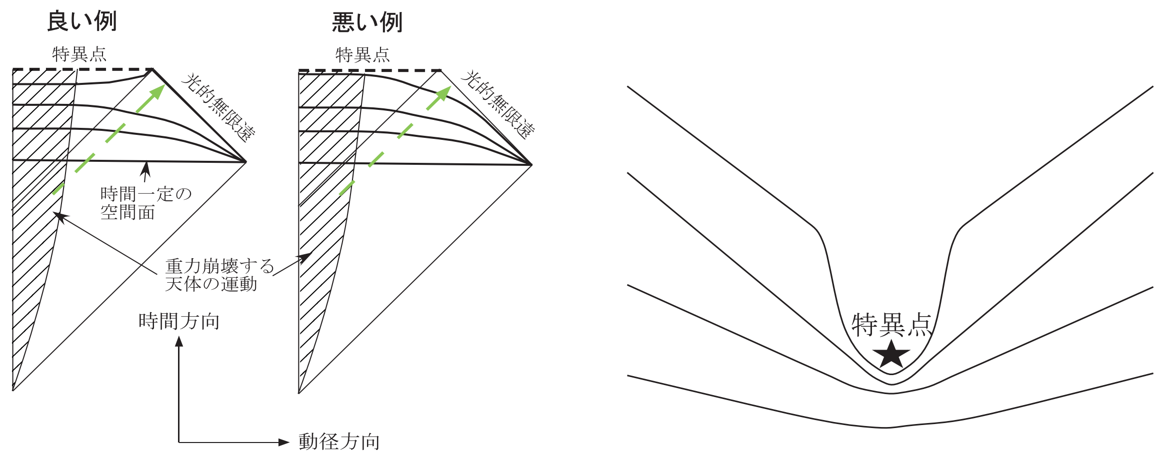

図 2: 左: ブラックホールが形成される場合には特異点が発生する。ブラックホール特異点に時間一定の空間的超曲面がヒットしないように、かつそれ以外の時空全体をカバーできるように、空間的超曲面を選ぶ必要がある。右: しかし、特異点を避けるような面を選び続けると、特異点近傍で空間的超曲面の歪みが増大し、いずれ計算が破綻する。(右図おいて、曲線群は空間的超曲面を表す。)

１つは、ブラックホールの存在を決定するための計算コードである。ブラックホールは事象の地平線で特徴付けられる。したがってその地平線の存在を決定する計算コードが必要である。もっとも、事象の地平線を決定するには光の軌道を全時空で計算する必要があって、そのためには全時空のデータを蓄積しなくてはならないが、空間 3 次元のシミュレーションではデータが大量になりすぎて、現状の計算機資源では難しい。そこで代わりに、見かけの地平線を決定する方法が広く用いられている。というのも見かけの地平線は、時間一定の空間的超曲面上ごとにその存在の有無が確認できるからである。非定常の時空では、見かけの地平線は事象の地平線とは一般的には一致しない。しかし、見かけの地平線が存在すれば、その外側に必ず事象の地平線が存在するという便利な性質が存在することが証明されているので [19]、代用可能となる。このようにコンピュータに対する要請は減るのではあるが、見かけの地平線を対称性の無い空間面上で決定することは数値的に自明な問題ではない。特殊な計算技術を開発する必要があり、1990 年代にはかなりの努力がなされた。

ところで、ブラックホールが形成された場合、あるいは始めからブラックホールが存在する場合には、系が時間発展してもその特異点に到達しないような空間的超曲面を選び続ける必要がある。(つまり特異点近傍では、時間が進まないように設定する。図 2 左図参照。) 一方、ブラックホール近傍で発生する重力波が遠方に伝わっていく様子については計算したい。重力波は、ブラックホール誕生後から遅れて遠方へと伝播していくので、ブラックホールから十分に離れた領域では時間は進むように空間的超曲面を選ぶ必要がある (図 2 右図参照)。

しかしながら、このようなスライスの選択をすると、必然的にブラックホールの地平線の近辺でラプス関数 [あるいは計量の時間時間成分 (g_{tt})] が大きな勾配を持ってしまう。シミュレーションを長時間実行すると、そのような勾配は発散し計算は破綻する (図 2 右図)。したがって、ブラックホールの存在する時空に対して、全時空を空間的超曲面が覆うようにシミュレーションを実行すれば、計算は途中で必ず破綻する。

ここで、ブラックホールの地平線の内側から外側には情報が伝わることはない、という性質が役に立つ。つまり、地平線の内側を切り取ってしまっても、それは外側の領域には何の影響も及ぼさないのである。多くの場合には、ブラックホール地平線の外部にだけ興味があって、内部には興味がない。そういった場合には、地平線内は計算せずに、その外側だけを計算するいわゆるブラックホール切り取り技法が有効である [20]。ただしこれは、理屈では正しいと誰にでも分かるのだが、実際に実行しようとすると容易ではない。というのも、計算領域の一部を切り取ってしまうと、切り取った付近において通常の中心差分法が適用できなくなるからである。つまり、切り取りに伴って、安定かつ正確にシミュレーションが可能な定式化や差分

法を開発しなくてはならない、という課題が新たに生じる。

重力波を抽出するためのコードも必要不可欠である。もっとも、抽出法に関しては、理論的には様々なアイデアが提案されており、ほぼ解決していると考えて良い [21]。むしろ問題は他にある: 重力波は重力波源から十分遠方の波動帯で抽出しなくては、正確な波形は得られない。つまり、波動帯までを含んだ十分広い計算領域を用意する必要がある。このためには、十分に大きなメモリーをつんだスーパーコンピュータが必要である。例えば合体直前の連星中性子星や連星ブラックホールの場合、波動帯は連星から 50–100GM/c^2 以上離れた場所となる (M は連星の合計の質量である: 合体中の連星やあるいは振動するブラックホールからの重力波に関しては、若干制限が甘くおよそ 20GM/c^2 以上離れた場所となる)。例として、連星中性子星が合体しブラックホールが最終的に形成される問題を考えよう。ブラックホールの誕生や成長を正確に計算するには、系の重力半径 GM/c^2 あたり 10 グリッド以上あてがう必要がある。仮に外側の境界を 50GM/c^2 の位置に置くとすれば、一様メッシュを張ったときには最低でも１つの軸方向約 1000 グリッド (プラス、マイナス２方向考えている) は必要となる。ところで、 1000^3 のグリッドを用いた計算を実行するには、メモリーは約 1000 ギガバイト必要である。つまり現在では使用不可能な超大型のスーパーコンピュータが必要となる。もしも、 1000 ギガバイトのメモリーを使用できる環境がなければ、波動帯が含まれる計算領域を用意するために Adaptive Mesh Refinement (AMR) 法 [22] のような技法を駆使しなくてはならない。

また有限の領域中でシミュレーションを実行する場合には、外部境界で物理的な境界条件を計量に対して課す必要がある。これは特に、重力波の波形を正確に計算するためには必要不可欠であるのだが、それほど容易な作業ではない。それは、以下のような事情による。計量はテンソルなので、大雑把にいってスカラー、ベクトル、テンソルの 3 成分からなる。テンソル部分が重力波であり、普通の意味でいうところの重力ポテンシャルがスカラー成分である、と近似的に理解できる。重力波は、外部境界付近で外向きに伝播する波として振舞うから、外向波境界条件にしたがう。一方、重力ポテンシャルは波でないので、大雑把に言えば $1/r$ に比例して変化する。問題なのは、計量の中にこれらの成分が混在していることである。両方の条件を同時に課すことは出来ないので、現在のところ、最も支配的な成分だけを考慮して近似的に境界条件は課されている。しかしこれでは厳密でないので、どうしても誤差 (正確には非物理的成分) が発生してしまう。誤差を小さくするためには、より精密な境界条件を与えるために、変数の定義の仕方などを工夫する必要がある。あるいは、外部境界を十分遠方に置くことが出来るような数値技法 (例えば AMR 法) を開発して、境界条件の影響が興味ある領域に及ばないようにするしかない。

3　数値的相対論の現状

前節で述べた課題は、どれ１つとして 10 年前、 1993 年の段階では解決されていなかった。(もちろん、アイデアとしてすでに提唱されていたものはあるが、空間多次元の数値計算で有用性が実証されてはいなかった。) しかし最近 10 年ほどの研究の結果、多くの課題が解決されたか、または解決されつつある。表１に現状をまとめる。以下では、個々の課題に関する研究状況を述べる。なお相対論的流体方程式の解法に関しては詳しいレビューが存在するので [18]、ここではこれ以上詳しく触れない。また、見かけの地平線を決めることは、もはや容易となっているので議論しない (例として [23, 24, 25, 26])。

3.1　初期条件

3.1.1　回転星

任意の回転則、状態方程式に対して、回転星の平衡形状の数値解を計算可能にすることは、 1980 年代における課題の 1 つだったが、江里口氏らの努力の結果それが 1989 年に可能になった [27]。具体的に行なったことは、 1986 年に蜂巣氏 [28] が開発したニュートン重力下での回転平衡形状の計算法の一般相対論の場合に対する一般化である。彼らの仕事のおかげで、いまでは誰もが簡単に一般相対論的回転星の平衡形状を

個々の課題	現状
初期条件	(a) 回転星: 任意の回転則、状態方程式に対して 全く問題無く与えることができる (e.g.,[27])。 (b) 連星中性子星: およそ完成 [31, 32]。 (c) 連星ブラックホール、中性子星 - ブラックホール連星: 研究初期段階 (e.g.,[37, 38])。
重力場の発展方程式	ほぼ完成。様々な定式化が提唱されている [43, 44, 51, 52]。
ゲージ条件	ブラックホールが存在しないならば、研究済み。問題無し。 ブラックホールが存在する場合については研究途中。
相対論的流体方程式	様々な手法が開発されている [18]。特に最近では、衝撃波高分解スキームを用いるのが主流になりつつある [18, 48, 16]。
物理的素過程 および磁場	球対称の場合を除いた数値的相対論においては、 この方面の努力はほとんどなされていない。
地平線の発見コード	完成済み。現在では容易に計算可能 [23, 24, 25, 26]。
重力波の抽出方法	方法は種々あるので問題ない [21]。しかし、重力波を捕らえるためには 波動帯まで計算領域を用意しなくてはならないので、大規模計算機を用意 するか、あるいは AMR 法 [22] のような技術を開発する必要がある。
外部境界条件	近似的なものは開発されているが、厳密な条件は未開発。 重力波の計算誤差を押えたり、境界で発生する誤差を押えるためには 高精度の条件が必要。あるいは、境界が十分遠方になるように工夫するか。
ブラックホール地平線での 境界条件および差分法	1 つのブラックホールが定常に存在しているような場合には、 解析解が知られているので、理論的にも数値的にも問題なし [50, 52]。 一般の問題に対しては、定式化やゲージ条件も含めて研究途中。

表 1: 数値的相対論の現状のまとめ。

求めることができる。(一般相対論的回転星の平衡形状に関しては、過去 15 年様々な仕事がなされたが、それらについてはレビュー論文 [29] を参照のこと。)

3.1.2 連星中性子星

合体直前の連星といえども、軌道半径が約 $6GM/c^2$(ただし、 M は系の全質量) よりも小さくない限りは、重力波放出のタイムスケールの方が軌道周期よりも長い。したがって、準周期的平衡軌道にあると考えて良い。つまり、合体のシミュレーションを行なう時に与えるべき現実的な初期条件は、準平衡状態にあるような連星中性子星である。

しかしこの条件だけでは、まだ速度場に無限の自由度が存在する。幸いなことに、連星中性子星の場合には、渦度がゼロの速度場を与えることが現実的であるということが分かっている [30]。これは、重力波放射の結果軌道半径が縮む間、粘性の効果が小さいために渦度が保存することと、合体直前の連星の軌道周期が 2 ミリ秒程度なので、よほど高速自転している中性子星を考えない限りは、個々の中性子星の自転運動は無視できることの 2 点から分かる。

近接連星中性子星の現実的準平衡状態の数値計算法は、瓜生氏やフランスの Meudon のグループ (Bonazzola, Gourgoulhon ら) によって最近開発された [31, 32]。平衡形状を与えるには、静水力学方程式 [33] と重力場の方程式が同時に成り立つように、式を解かなくてはならない。ここで重力場に対してどのような式を解けば良いかが問題になる。連星は非軸対称・非定常の運動をしているために重力波が放出されるが、準平衡形状を求めたいので、これを無視するような定式化を用意しなくてはならない。また、準平衡形状の系列が満たすべき条件が存在するが [34]、それを満足させることのできるような定式化が望ましい。現状では、彼らは 3 次元計量がコンフォーマル平坦になるような計量を仮定して重力場の方程式を解いている [35]。この場合、導き出される式が全て楕円型の方程式となるので、重力波の成分が無視されていると考えることが出来るからである。また [34] で導き出された、平衡形状系列に対する熱力学第一法則に類似の関係も、この定式化では満足することが分かっている。一般相対論的にベストの仮定であるとは考えられないが、そこそこの良い近似になっているものと予想できる。(例えば、球対称の場合には厳密な定式化になっ

ているし、回転星の平衡形状に対する高精度の近似解を与える [36]。)

このように重力場に対する近似が入るものの、(近似的な) 準平衡形状を求めるための計算コードは上記 2 グループによって完成されている。現在では、任意の状態方程式、質量比に対して、準平衡形状が計算可能である。コンフォーマル平坦性を仮定しないより厳密な重力場の方程式を用いて準平衡形状を求めることが、今後の課題として残されている。この問題には、瓜生、 Gourgoulhon、 Cook、 Friedman、 Price などの研究者が最近取り組んでいる。

3.1.3 ブラックホール – 中性子星連星、連星ブラックホール

ブラックホールが連星の構成要素である場合に初期条件を用意するにあたって第一に問題となるのが、そのスピンが一意的に決まっていないことである。ここが連星中性子星の場合と大きく異なる。したがって、調べるべきパラメータ空間が無限に広い。更に問題なのが、スピンが軌道回転軸と平行でない場合には、複雑な歳差運動を起こすために円軌道が閉じないことである。こうなると平衡状態ではなくなってしまい、どのような初期条件を与えればよいのか全く見当がつかなくなる。そこで以下では、スピンと軌道回転軸が平行な場合に限って話を進める。

この限定された場合に関しては、連星中性子星の場合同様に、準平衡状態がシミュレーションに必要な現実的な初期条件である。しかしながら、ブラックホールが含まれる連星の場合、どのような式を解くことによって準平衡状態が与えられるのかについては良く分かっていない。これまでのところ連星中性子星の場合同様に、コンフォーマル平坦性を仮定した仕事は幾つか存在する [37, 38]。しかし、ブラックホール近傍は重力が極端に強いので、コンフォーマル平坦性を仮定するような近似では精度のよい解は得られないと予想できる。またブラックホールは大抵の場合回転していると考えられる。つまり、ブラックホール近傍はカー計量で記述されるべきであるが、コンフォーマル平坦な計量を採用する限りカー計量は再現できない [39]。これらの理由から、コンフォーマル平坦の仮定を採用するのは不適切である。より厳密な定式化の候補は幾つか提唱されているのだが、具体的な数値計算がなされていないので、それらが有望であるのかどうかも今のところ明らかではない。具体的な数値計算が今後の課題である。

ところで、ブラックホール – 中性子星連星の準平衡形状を求めるための努力は、ほとんどなされていない。

3.2 重力場の発展方程式

アインシュタイン方程式を初期値問題として解くために、通常は時空を 3+1 分解する。ここで 3 が空間を表し、 1 が時間を表す。つまり、時間が一定である空間的超曲面 (場合によってヌル面) で時空全体をスライスし、時空全体が空間的超曲面の時間発展となるように方程式を書き換える。このような定式化を最初に開発したのが、 Arnowitt-Deser-Misner で、彼らの形式を我々は ADM 形式と呼ぶ [40, 41]。 ADM 形式は、数値計算に有用であると長らく思われてきた。しかし、この定式化を用いてシミュレーションを実行すると、計算がすぐに不安定化してしまうことが近年多くの数値実験において明らかになってきた。つまり、数値計算に向かないのである。そこでその改良版として、過去 15 年間様々な定式化が提唱されてきた。

その中でも最も古くに提唱されながらも、今なお最も有用であるものとして、中村氏によって考案された中村形式がある [42]。もともと ADM 形式においては、発展方程式によって解かれるのは、 3 次元計量 (γ_{ij}) と外的曲率 (K_{ij}) の合計 12 成分であったのだが、中村形式ではさらに計量のダイバージェンス ($f_i \equiv \gamma_{ij,j}$) と行列式 (γ) および外的曲率のトレース (K) の 5 成分を新たに変数として付け加え、独立に方程式を構成し時間発展させる。このとき、束縛条件を使って、発展方程式を多少書き直すのも重要な作業の 1 つである。中村形式では数値不安定が押えられ、計算が長時間安定に継続するようになる。

もとの中村形式では、変数があまり系統的に定義されておらず、方程式がかなり醜い形をしているので、これを多少すっきりとした形に書き直した仕事として [43, 44] などがある。形がすっきりしているのでこれ

らの論文の方が有名になったのだが、定式化する上で用いているアイデアは、本質的に中村形式のそれと同じである。(しかし現在は 4 人の著者の頭文字を取って、 BSSN 形式と呼ばれることが多い。)

しかし、もともとの中村形式にも問題があった。たとえば、3 次元計量とその行列式を独立に解く場合に、3 次元計量から計算される行列式が、独立変数である行列式 γ と一致していないと矛盾が生じる。もともとの中村形式では、このことが近似的にさえ保証されていないので、ずれが時間発展とともに蓄積し易い。例えば、星の重力崩壊などでブラックホールが形成される場合に、その地平線の面積が正しく求まらない、といったことが発生した。この欠点はその後、たとえば柴田によって中村形式を改良することによって、克服された (1997 年以来筆者が用いている定式化は、修正された中村形式である。この中村・柴田形式では上述のずれが急激に増大することはない。中村・柴田形式については例えば [45, 14] を参照)。いずれにせよ、数値計算が安定にかつ精度良く実行されるための定式化の 1 つが、中村形式を発展させた形で完成している。なお幾つかのグループが、 Baumgarte と Shapiro によって修正された、本質的には中村形式と同等の形式 (BSSN 形式 [44]) を現在採用している [46, 47, 48, 49, 50]。

この他にも全く別の観点から構築された定式化も存在する。 1 つは、双曲型形式と呼ばれる定式化である [51]。 ADM 形式によれば、発展方程式は 2 階の双曲型方程式である。これを流体力学の方程式系のように、 1 階の双曲型に書き換えたのが、双曲型形式である。このような形式を用いる利点は、特性曲線の方向が明らかになることにある。その結果、境界条件を課すのに有用であったり、また流体力学で開発されてきた数値技法を用いるのに便利であったりする。双曲型形式の中で最も有望そうに見えるのが、 Kidder, Scheel, Teukolsky によって考案された KST 形式である [52]。この形式では、 40 程度の変数を用いて、 ADM 形式を双曲型形式に書き直している。アインシュタイン方程式は束縛方程式を含むので、発展方程式にこの束縛方程式を足す自由度が存在するのだが、 KST 形式で特徴的なのは、束縛方程式を付け足す際の係数をラグランジアン未定定数のように用いている点である。この定数を適当に調整することによって、数値安定性を調整することが可能になるようにアレンジされている。もっとも、問題ごとに定数の最適値が異なるので [53]、どのように定数を選ぶかが課題となっている。今のところ、 1 つのブラックホールの進化を追うような単純な問題では有用なことが示されているが [52]、それ以上に複雑な問題に関しては結果は公表されていない。

もう 1 つは、ヌル座標を用いた形式である (ヌル形式)[54, 55]。 ADM 形式では、アインシュタイン方程式を初期値問題に適した形式に書き換える際、時間一定の空間的超曲面ごとに時空をスライスする。ヌル形式では、空間的超曲面の代わりに、ヌル的超曲面によって時空をスライスする (図 3 参照) 。利点は、 (i) 重力波のようにヌル測地線に沿って伝搬する波を計算し易い点、および (ii) 重力崩壊などでブラックホールが形成される場合に地平線の外側を完全に多い尽くすようなスライスが可能な点の 2 点である。ヌル形式の 1 つで Bondi 座標を用いた形式は、 Winicour と彼の共同研究者によって開発され、ブラックホール時空を対象とした幾つかの興味深い研究がこれまでになされている [54]。また最近では、このコードを用いた重力崩壊の研究もなされている [56]。もっとも、彼らによってこの形式の欠点も指摘されている。それは、多次元計算において座標特異点が発生し易い点である。したがっていまのところ、全ての問題に対して有用な形式にはなっていない。

3.3 ゲージ条件

ゲージ自由度には 2 種類ある。 1 つは、時間一定の空間的超曲面 (場合によってはヌル面) を決めるための自由度であり、もう 1 つは時間軸の方向を決めるための自由度である。前者はラプス関数の自由度、後者はシフトベクトルの自由度と呼ばれる。

ラプス関数を決める時に特に注意すべき点は、 (i) 空間的超曲面にカスプのような座標特異点が生じないのようにすること (つまりなめらかな超曲面を張ること)、および (ii) ブラックホールが形成される時に真の特異点が発生するが、そこに超曲面がヒットしないようにすることの 2 点である (図 1、 2 参照)。このような要請を満足する条件として、 maximal slice 条件 [57] が古くから広範な問題に適用されてきた。実際これ

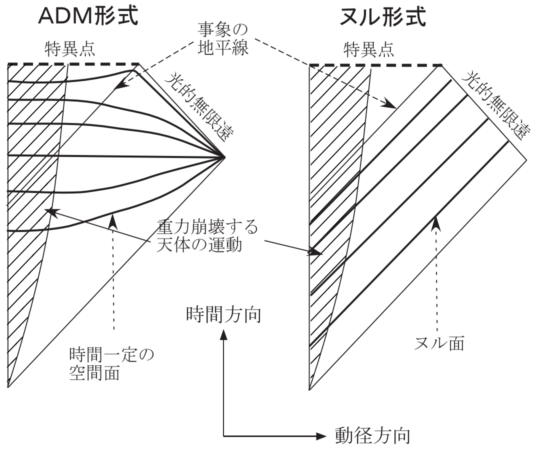

図 3: 2 つの形式における時空のスライスの仕方の違いを、星の重力崩壊の結果ブラックホールが誕生する時空を例に説明する。左:ADM 形式における時空のスライスの仕方。空間的超曲面の束を構成する。右: ヌル形式における時空のスライスの仕方。ヌル的超曲面の束を構成する。

を用いて問題が発生することは経験的にほとんどない。しかしながら、この条件を課すには、ラプス関数が満足する楕円型方程式を解く必要がある。このことは 2 つのデメリットを発生させる。1 つは、計算時間が長くなること、もう 1 つはブラックホールが存在しかつ切り取り技術 (前述) を採用する場合には、ブラックホール地平面での境界条件が自明でないこと、である。ブラックホールが存在しない場合には、計算が重くなることに目をつぶれば問題はない。しかし、ブラックホールが計算の最初から存在したり、途中で誕生したりする場合には、代わりの条件を採用することが望ましい。代案として、代数的スライス条件 [50] や双曲型スライス条件 [58] が提案されているが、テスト問題ではない具体的問題に対して計算の成功例が存在しないので、現状ではこの問題が解決しているとは言えない。

一方、シフトベクトルは、系に角運動量が存在する場合に重要な役割を演じる。連星の軌道運動や星の自転運動に伴って、座標系が引きずられ捻れていくからである (レンツ・シリング効果と呼ばれる)。この引きずりの効果を放置すると座標が絶え間なく捻れていくが (図 1 参照)、それは空間計量のある成分が単調にかつ局所的に増大するという結果をもたらす [11]。分解能以上に計量の勾配が増大してしまうと計算は破綻してしまう。このことを回避するために、捻れを打ち消すようにシフトベクトルをうまく選ぶ必要がある。

このような要請を満たすと期待できる条件として、 Minimal distortion gauge (MDG) 条件が 25 年ほど前に提案された [57]。この条件においては、座標変換の自由度に由来する計量中の歪み成分の大きさのグローバル平均 (適当に定義する) が、与えられた空間的超曲面上で極小になるようにシフトベクトルを選ぶ。その物理的意味は明快であるので、誰もが優れた条件であると認めていた。しかし、球対称時空以外に対しては長らく使用されてこなかった。それは、この条件を課すには、シフトベクトルに対するベクトル楕円型方程式を解く必要があるからである。楕円型方程式の数値解を得るには、一般に時間がかかるが、それがベクトルになるのだからなおさら時間がかかる。そのために敬遠され続けた。

しかしながら、コンピュータの性能の向上と数値的技法の進歩に伴って、最近では MDG が使われ始めた [48, 10, 11]。(正確には MDG に似た条件を用いているのであって、厳密に同じゲージ条件を課しているのではないが、ベクトル楕円型方程式を解くという意味ではかわりはない。) そして、実際にこのタイプのゲージ条件が有用であることが実証されている (e.g.,[11, 14, 16])。

しかしながら、楕円型方程式を解く必要があるため、ブラックホールが存在する場合には maximal slice の場合と同じ問題が発生する。そこで代わりのゲージ条件として、双曲型座標条件が提案されている [50, 58]。実際にある種の双曲型座標条件が有用であることは、[50] や最近の筆者の計算 [59] で確認されている。今後はこのタイプのゲージ条件が主流になっていくものと思われる。

3.4 重力波の抽出・外部境界

精度良く重力波の波形を計算するには、それを波動帯で抽出しなくてはならない。現在の計算機資源 (国立天文台の VPP5000) で、デカルト座標を用いて一様グリッドを張った計算を行う場合、最大で $800\times800\times400$ 程度のグリッドを張ることが可能である (赤道面対称を仮定する)。つまり、連星合体のシミュレーションにおいて、近波動帯までならグリッドで覆うことは可能である。したがって、そこそこの精度の (誤差 10% 程度の) 重力波の波形であれば力任せに計算可能である。

これ以上に精度を向上させようとする場合には、何らかの努力が必要である。一般的に言って以下の 2 つの方向の努力が必要であろう。 (i) AMR 法のような技術を用いて、外部境界の位置をさらに遠くに持っていく、 (ii) 外部境界条件の精度を向上させる。 (i) は純粋に技術的問題である。 (ii) は純粋に技術的問題と計量の漸近的挙動を明らかにするという理論的問題の両方が含まれる。 (i) を用いて外部境界を非常に遠方に置くことが出来れば、 (ii) は不必要かもしれない。いずれにせよ、これらの技術・理論の開発は、数値的相対論の分野では十分に進んでいるとは言えない (ただし AMR 法の開発に関しては、一部では取り組まれている [60, 61])。

重力波抽出に関する精度の問題だけでなく、全体の計算精度の向上に対しても外部境界の取り扱い方は重要なので、 (i) と (ii) の方向に沿った努力は今後必要不可欠である。

3.5 未解決問題: ブラックホール切り取り法

ブラックホールが計算の最初から存在したり、または途中で誕生したりする場合には、ブラックホール切り取り技法を採用することが望ましい。前述したように、簡単な問題に対してはこの方法は確立している。しかし、より複雑な問題に対しては未確立の技法である。様々な問題が確立を妨げているがそれらを列挙すると以下の通りである: (i) どのような定式化が有効か、 (ii) どのようなゲージ条件を用いれば良いのか、 (iii) どのような境界条件を用いれば良いのか、 (iv) どのように差分するのか。これらはお互いにカップルしている。というのも、定式化やゲージ条件によって課すべき境界条件は異なってくるし、また境界条件によって用いるべき差分法も違ってくるからである。

最も望ましいのは、重力場、ゲージ場の全ての特性曲線の方向が、ブラックホール近傍で内側を向いていると明確に分かるような定式化、ゲージ条件である。これならば、ブラックホール近傍において内向波境界条件を課すことができるからである。内向波境界条件を課すのならば、差分はブラックホールの外側のグリッドのみを使って容易に実行できるから、すべての問題が一挙に解決する。つまり、そのような性質を持つ定式化、ゲージ条件を見つけることが、もっとも正当な解決法である。 (また、その定式化で数値不安定性が発生しないことも必要である。)

余談だが、ブラックホール時空のシミュレーション法は、アメリカやヨーロッパにおいて盛んに研究されているが、日本では全く誰も研究を行なっていない。

4 今後の方向

4.1 連星中性子星の合体

ブラックホールが存在しない場合ならば、計量、物質の発展方程式の解法、ゲージ条件の選び方、課し方など数値計算に必要な要素は、理論的にも数値的にも十分理解され、解決していると言ってよい。なので、連星中性子星が合体し仮に重い中性子星が合体後に形成されれば、その中性子星が何らかの定常状態に落ち着くまで十分に長い時間計算が持続可能であるし、またブラックホールが形成される場合でも、見かけの地平線を決定する時点までならば計算が可能である [13, 14]。しかしながら、上で述べたように、ブラックホール形成後しばらくすると計算が破綻するので、困難を克服するのにブラックホール切り取り技法が必要不可欠である。 3.5 節で述べたように、現在までのところ、ブラックホール１つが計算の最初から存在して

いるような単純な場合については、この技法を用いてシミュレーションが長時間実行可能であることが実証されている [50, 52]。しかし、ここで考えているようなより複雑な場合に対しての計算の成功例は存在しない。ブラックホール形成後も長時間シミュレーションを継続することは、今後の課題の 1 つである。

他にも課題は幾つかある。1 つは重力波の波形の計算精度の向上である。重力波はいまのところ近波動帯で抽出されている。精度を向上するには、外部境界をもっと遠くに持っていく必要がある (3.4 節参照)。またこれまでのシミュレーションは、単純な状態方程式を仮定して行なわれているが、より現実的なものを採用することも今後の課題である。(ただし、状態方程式を現実的なものに変更する作業は、それほど難しくはない。)

4.2 ブラックホール連星の合体

これまでのところ、現実的シミュレーションに成功したグループは存在しない。理由は、現実的初期条件の計算が完成していない、ブラックホール切り取り技法が完成していない、どのようなゲージを選べばよいのかよくわかっていない、などである。解決すべき課題が山積みの、最もチャレンジングな問題である。

なお正面衝突に近い場合の連星ブラックホールの衝突のシミュレーションは、数グループによって実行されている [62]。このようなシミュレーションは、継続時間が数 $10GM/c^3$ (M は系の全質量) と短くて済むから可能なのである。実行したい現実的シミュレーションの場合には、継続時間が約 $1000GM/c^3$ 程度になるから難しいのである。ところで、ブラックホールと中性子星の合体のシミュレーションは、正面衝突の場合すら全くなされていない。

4.3 回転星の重力崩壊・ブラックホールの形成

回転星の重力崩壊に対する現実的かつ一般相対論的なシミュレーションは、これまで全く行なわれていない。1980 年代に、2 グループによって一般相対論的数値コードが構築されたが [63, 42, 64]、現実的な初期条件や状態方程式を用いたシミュレーションは実行されなかった。そもそも現実的な初期条件 (回転星の平衡形状) を与えるための数値的技術も未成熟であったし、また精度の良いシミュレーションを行なうための数値計算技術、計算機資源も十分ではなかった。しかし、最近新たに 2 つのグループが高精度の軸対称数値的相対論用コードを開発して、この状況が変わりつつある。

グループの 1 つは、ミュンヘンとバレンシアを中心としたグループである。彼らは現在、ヌル形式を用いてこの問題に取り組んでいる [55, 56]。もう 1 つは筆者らのグループである [16]。筆者らは、3 次元コードを Cartoon 法と呼ばれる軸対称化法を用いて [65]、軸対称コードを構成している。どちらのグループも衝撃波高分解スキームを流体コードとして採用している。これまでのところ、放出される重力波に着目して、パラメトリックな (比較的現実的なものに近い) 状態方程式を用いてシミュレーションを行なっている。

現在の計算機資源 (例えば VPP5000) ならば、円筒座標を用いた場合、最高で 10000^2 程度のグリッドを張った計算が実行可能である。(現実的には 3000^2 程度を用いる。) 今後、回転星の重力崩壊、高速回転中性子星の形成、ブラックホール形成といった問題を高精度でシミュレーションできると予想している。実際にそのような研究が現在進行中である。

4.4 回転星の振動・不安定性

回転していない星の振動モードや不安定性は、一般相対論の場合でも、線形摂動論によって比較的容易に現在では調べることができる。摂動が球面調和関数展開できるので、基礎方程式が常微分方程式に帰着するからである。しかし回転星の場合、調和関数展開の仕方が見つかっていないので、摂動理論による解析は容易ではない。線形摂動を用いるよりも、むしろシミュレーションを実行した方が今となっては易しい場合もある。しかし、一般相対論的数値シミュレーションが最近になって可能になったばかりということもあり、ほとんど仕事はなされていない (ただし断片的にはなされている [10, 12, 48, 16, 66])。

回転星が重力崩壊して原始中性子星が形成される場合や、連星中性子星が合体して重い中性子星が形成される場合には、それらは非線形な振幅を持った振動をしている。その結果その振動に伴って重力波が発生する。つまり、どのような振動数の重力波が発生するのかについては、回転星の振動を研究すれば大まかには理解できる。よって、地味だが、回転星の振動に関する系統的研究は重力波天文学において重要である。

参考文献

[1] M. Ando et al., (the TAMA collaboration), Phys. Rev. Lett. **86** (2001), 3950.

[2] K. S. Thorne, in *Proceeding of Snowmass 94 Summer Study on Particle and Nuclear Astrophysics and Cosmology*, eds. E. W. Kolb and R. Peccei (World Scientific, Singapore, 1995), 398.

[3] K. S. Thorne, in 300 Years of Gravitation, eds. S. W. Hawking & W. Israel (Cambridge University Press, 1987), 330: C. Cutler & E. E. Flanagan, Phys. Rev. D **49** (1994), 2658.

[4] For example, L. Blanchet, in *Relativistic gravitation and gravitational radiation*, edited by J.-P. Lasota & J.-A. Marck (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).

[5] K. Nomoto et al., astro-ph/0209064.

[6] For example, M. R. Metzger et al., Nature **387** (1997), 878: S. R. Kulkarni et al., Nature **393** (1998), 35.

[7] M. J. Rees, in *proceeding of eighteenth Texas symposium on relativistic astrophysics, and cosmology*, eds. A. V. Olinto, J. A. Frieman, & D. N. Schramm (World Scientific), p. 34: P. Meszaros, astro-ph/9904038. T. Piran, Phys. Rep. **314** (1999), 575; **333** (2000), 529.

[8] S. E. Woosley, Astrophys. J. **405** (1993), 273: Paczynski, Astrophys. J. Lett. **494** (1998), L45.

[9] 数値的相対論の研究者は、現在世界中に数多く存在する。代表的グループと人物を挙げておく (日本以外)。グループ – 人のように表記する。
Potsdam (Germany)–E. Seidel; Valencia (Spain)–T. Font, J.-M. Ibanez; Munchen (Germany)–E. Müller; Meudon (France)–S. Bonazzola, E. Gourgoulhon; Thessaloniki (Greece)–Stergioulas; Cornell (USA)–S. A. Teukolsky, L. Kidder; Illinois (USA)–S. L. Shapiro; Bowdoin (USA)–T. W. Baumgarte; NASA (USA)–J. M. Centrella; Pittsburg (USA)–J. Winicour; Penn State (USA)–P. Laguna, B. Brügmann; Luisiana (USA)–J. Pullin, L. Lehner; Caltech (USA)–L. Lindblom, M. A. Scheel; Mexico–M. Alcubierre; Wake Forest (USA)–G. B. Cook; North Carolina (US)–J. York; Texas (USA)–R. Matzner; British Columbia (Canada)–M. Choptuik など.

[10] M. Shibata, Phys. Rev. D **60** (1999), 104052.

[11] M. Shibata, Prog. Theor. Phys. **101** (1999), 1199.

[12] M. Shibata, T. W. Baumgarte, & S. L. Shapiro Phy. Rev. D **61** (2000), 044012: Astrophys. J. **542** (2000), 453.

[13] M. Shibata & K. Uryū, Phys. Rev. D **61** (2000), 064001.

[14] M. Shibata & K. Uryū, Prog. Theor. Phys. **107** (2002), 265.

[15] M. Shibata, Prog. Theor. Phys. **104** (2000), 325.

[16] M. Shibata, Phys. Rev. D **67** (2003), 0440xx.

[17] M. Shibata & S. L. Shapiro, Astrophys. J. **572** (2002), L39.

[18] J. A. Font, Liv. Rev. Relativ. **3**, 2, 2000 http://www.livingreviews.org/Articles/Volume2/2000-2font.

[19] S. W. Hawking & G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, 1973).

[20] もともと、W. Unruh がアイデアを提唱した。以下も参照: E. Seidel & W. M. Suen, Phys. Rev. Lett. **69** (1992), 1845.

[21] 例えば、A. Abrahams et al., Phys. Rev. D **45**, 3544 (1992): N. T. Bishop et al., gr-qc/9801070: J. Baker, M. Campanelli & C. Lousto, Phys. Rev. D **65** (2002), 044001: J. Baker et al., Phys. Rev. Lett. **87** (2001), 121103.

[22] M. Berger & J. Oliger, J. Comp. Phys. **53** (1984), 484.

[23] M. Shibata, Phys. Rev. D **55** (1997), 2002; M. Shibata & K. Uryū, Phys. Rev. D **62** (2000), 087501.

[24] M. Alcubierre et al., Class. Quantum Grav. **17** (2000), 2159.

[25] T. W. Baumgrate et al., Phys. Rev D **54** (1997), 4849.

[26] M. F. Huq, M. W. Choptuik & R. A. Matzner, Phys. Rev. D **66** (2002), 084024.

[27] H. Komatsu, Y. Eriguchi, & I. Hachisu, Mon. Not. R. Astron. Soc., **237** (1989), 355; **239** (1989), 153.

[28] I. Hachisu, Astrophys. J. Supple. **61** (1986), 479.

[29] N. Stergioulas, Liv. Rev. Relativ. **1**, 8 (1998).

[30] C. S. Kochanek, Astrophys. J. **398** (1992), 234: L. Bildsten & C. Cutler, Astrophys. J. **400** (1992), 175.

[31] K. Uryū & Y. Eriguchi, Phys. Rev. D **61** (2000), 124023; K. Uryū, M. Shibata, & Y. Eriguchi, Phys. Rev. D **62** (2000), 104015.

[32] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon & J.-A. Marck, Phys. Rev. Lett. **82** (1999), 892: E. Gourgoulhon, P. Grandclément, K. Taniguchi, J.-A. Marck, & S. Bonazzola, Phys. Rev. D **63** (2001), 064029: K. Taniguchi & E. Gourgoulhon, Phys. Rev. D **66** (2002), 104019.

[33] M. Shibata, Phys. Rev. D **58** (1998), 024012: S. A. Teukolsky, Astrophys. J. **504** (1998), 442: S. Bonazzola, E. Gourgoulhon & J.-A. Marck, Phys. Rev. D **56** (1997), 7740: H. Asada, Phys. Rev. D **57** (1998), 7292.

[34] J. F. Friedman, K. Uryū & M. Shibata, Phys. Rev. D **65** (2002), 064035.

[35] J. Isenberg & J. Nester, in *General Relativity and Gravitation* Vol.1, ed. A. Held, (Plenum Press, New York 1980): J. R. Wilson & G. J. Mathews, in *Frontiers in Numerical Relativity*, ed. C.R. Evans, L.S. Finn & D.W. Hobill, (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1989).

[36] G. B. Cook, S. L. Shapiro & S. A. Teukolsky, Phys. Rev. D **53** (1997), 5533.

[37] E. Gourgoulhon, P. Grandclement & S. Bonazzola, Phys. Rev. D **65** (2002), 044020 & 044021.

[38] G. B. Cook, Phys. Rev. D **50** (1994), 5025: H. P. Pferffer, S. A. Teuklolsky & G. B. Cook, Phys. Rev. D **62** (2000), 104018: T. W. Baumgarte, Phys. Rev. D **62** (2000), 024018.

[39] W. Krivan & R. H. Price, Phys. Rev. D **58** (1998), 104003; Phys. Rev. Lett. **82** (1999), 1358.

[40] R. Arnowitt, S. Deser, & C. W. Misner, in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. L. Witten (New York: Wiley, 1962).

[41] J. W. York, Jr., in *Sources of Gravitational Radiation*, edited by L. Smarr (Cambridge University Press, 1979), 83.

[42] T. Nakamura, K. Oohara & Y. Kojima, Prog. Theor. Phys. Supple. **90** (1987), chapter 1.

[43] M. Shibata & T. Nakamura, Phys. Rev. D **52** (1995), 5428.

[44] T. W. Baumgarte & S. L. Shapiro, Phys. Rev. D **59** (1999), 024007.

[45] M. Shibata, Prog. Theor. Phys. **101** (1999), 251.

[46] J. A. Font, M. Miller, W.-M. Suen, & M. Tobias, Phys. Rev. D **61** (2000), 044011.

[47] J. A. Font, et al., Phys. Rev. D **65** (2002), 084024.

[48] K. Oohara & T. Nakamura, Prog. Theor. Phys. **136** (1999), 270.

[49] M. Alcubierre et al., Phys. Rev. D **61** (2000), 041501; **62** (2000), 044034.

[50] M. Alcubierre et al., Phys. Rev. D **64** (2001), 061501.

[51] C. Bona & J. Masso, Phys. Rev. Lett **68** (1992), 1097; C. Bona et al., Phys. Rev. D **56** (1997), 3405.

[52] L. E. Kidder, M. A. Scheel & S. A. Teukolsky, Phys. Rev. D **64** (2001), 064017; L. E. Kidder et al., Phys. Rev. D **66** (2002), 124005.

[53] L. Lindblom & M. Scheel, Phys. Rev. D **66** (2002), 084014.

[54] J. Winicour, Liv. Rev. Relativ. **4**, 3 (2001).

[55] F. Siebel et al., Phys. Rev. D **65**, 064038 (2002).

[56] F. Siebel et al., Phys. Rev. D (2003), submitted.

[57] L. Smarr & J. W. York, Phys. Rev. D **17** (1978), 1945, 2529.

[58] L. Lindblom & M. Scheel, gr-qc/0301120.

[59] M. Shibata, submitted to ApJ.

[60] M. W. Choptuik, E. W. Hirschmann, S. L. Liebling, and F. Pretorius, gr-qc/0301006.

[61] K. C. B. New, et al., Phys. Rev. D **62** (2000), 084039.

[62] 例えば、E. Seidel, in proceedings of *Gravitational Waves: A challenge to theoretical astrophysics* eds. V. Ferrari, J. C. Miller & L. Rezzolla (The Abdus Salam ICTP Publications, 2001), p.113.

[63] T. Nakamura, Prog. Theor. Phys. **65** (1981), 1876; **70** (1983), 1144.

[64] R. Stark & T. Piran, Phys. Rev. Lett. **55** (1985), 891 : in *Dynamical Spacetimes and Numerical Relativity*, ed. J. M. Centrella (Cambridge University Press, 1986), 40.

[65] M. Alcubierre, S. Brandt, B. Brügmann, D. Holz, E. Seidel, R. Takahashi & J. Thornburg, Int. J. Mod. Phys. D **10** (2001), 273.

[66] N. Stergioulas, personal communication.