数　値　的　相　対　論

柴田　大(東大総合文化)

内　容

0. イントロダクション
1. 数値的相対論において必要な要素
2. 現状：どこまで進んだのか
3. 3D計算例：連星中性子星の合体
4. 大規模・軸対称数値的相対論
5. まとめ

アニメーションは、http://esa.c.u-tokyo.ac.jp/~shibata/indexj.html**を参照**

0. イントロダクション：何故？

(A)　一般論

相対論的天体

－中性子星、ブラックホール、それらの連星、宇宙全体－

のダイナミクスを調べたいのならば、

アインシュタイン方程式を解かなくてはならない。

↓

アインシュタイン方程式＝連立非線形方程式。

↓

残念ながら、数値的にしか解くことが出来ない。

↓

数値的相対論

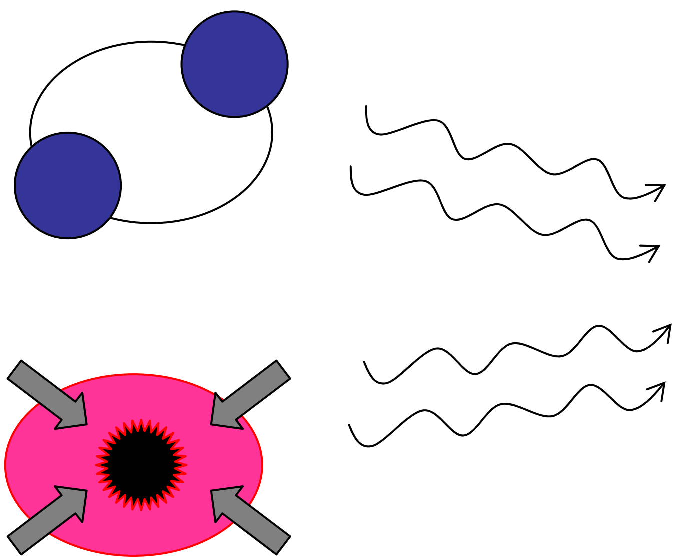
何故：II

(B)　調べる必要があるほど重要な問題があるのか？YES

い)　**重要力波天文学が現実化しつつある。**

TAMA, LIGO (米), GEO (独・英) が稼動中

➡ **連星の合体や星の重力崩壊により発生する**
重力波の波形を理論的に予測しなくてはならない

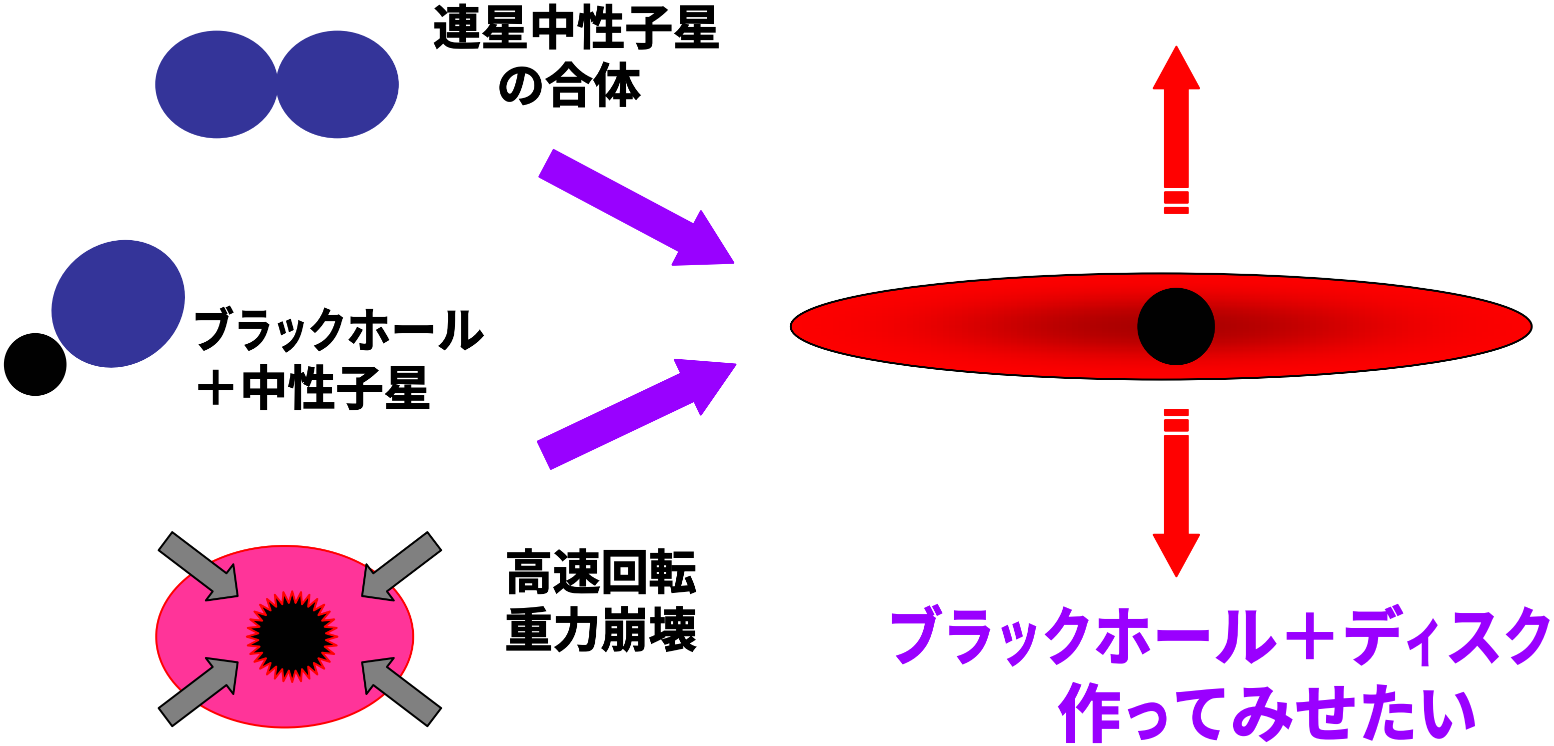


LIGO：Hanford＝感度上昇中

(B)　調べる必要があるほど重要な問題があるのか？続き

ろ）　解明すべき興味深い天体物理的問題がある。

例）　ブラックホールの形成過程、
ガンマ線バーストの中心エンジン
＝ブラックホール＋ディスク



ブラックホール＋ディスクを
作ってみせたい

（B） 調べる必要があるほど重要な問題があるのか？続き

（は） 一般相対論的現象は観測するのが難しい、珍しい

- 現実的に起こっていると予想できるが、観測できない現象を計算機上で明らかにする。
- 現実には起こらないかもしれないが、一般相対論の特色が暴かれうる原理的問題を明らかにする。

1. 数値的相対論において必要な要素

基礎方程式

- アインシュタイン方程式
- 相対論的物質場に対する発展方程式

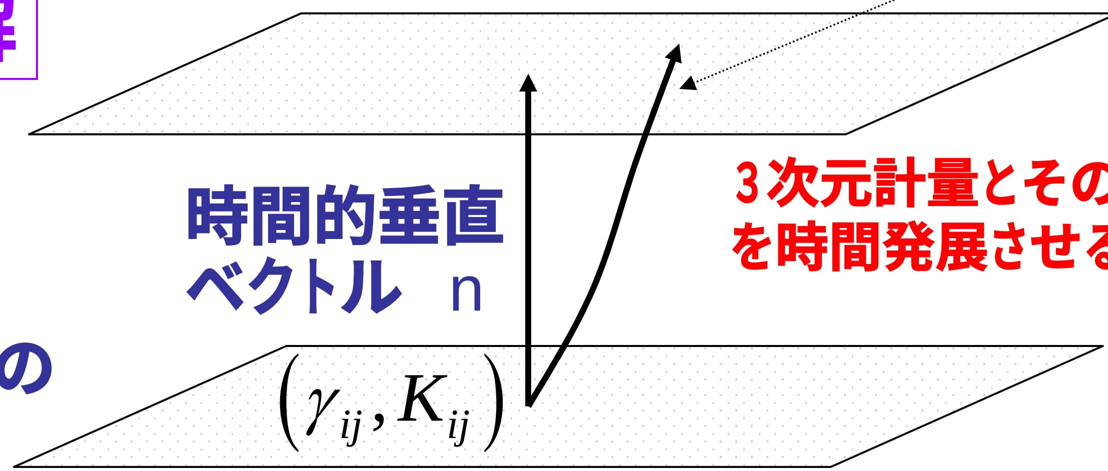
  相対論的流体 (相対論的粒子、スカラー場)

$$
\boxed{
\begin{gathered}
G_{\mu\nu} = 8\pi \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu} \\
\left\{
\begin{aligned}
&\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0 \\
&\nabla_\mu \left(\rho u^\mu \right) = 0
\end{aligned}
\right\}
\end{gathered}
}
$$

アインシュタイン方程式の解き方

3＋1分解

時間軸（任意）



時間的垂直ベクトル　n

時間一定の空間面

$\left(\gamma_{ij}, K_{ij}\right)$

3次元計量とその微分もどきを時間発展させる　$K_{ij} \propto \dot{\gamma}_{ij}$

$$G_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = 8\pi T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \ \text{: Hamiltonian constraint}$$

$$G_{\mu\nu} n^\mu \gamma^\nu_k = 8\pi T_{\mu\nu} n^\mu \gamma^\nu_k \ \text{: Momentum constraint}$$

$$G_{\mu\nu} \gamma^\mu_i \gamma^\nu_j = 8\pi T_{\mu\nu} \gamma^\mu_i \gamma^\nu_j \ \text{: Evolution equation}$$

γ_{ij} : 3-metric, n^μ : timelike normal

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla_i E^i &= 4\pi\rho_e \\ \nabla_i B^i &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{E}_i &= (\nabla \times B)_i - 4\pi j_i \\ \dot{B}_i &= -(\nabla \times E)_i \end{aligned} \right\}$$

T＝0で束縛方程式を解き、その後は発展方程式（双曲型）を解く。

数値的相対論に必要なコード

現実的初期条件

サイエンスを行うには必要

ゲージ条件（座標条件）

特異点を避ける、座標の歪みをただす、など

計量と物質場（流体、素過程）を発展させる

まず式の定式化、次に数値技術の開発

ブラックホール
誕生

重力波と計量から抽出

ホライズンの位置を決める

Horizon finders

波動帯までグリッドが必要
巨大コンピュータが必要

ホライズン近傍で
計量の勾配がきつくなる

ホライズン周りで特別な取り扱い

2. 現状：どこまで進んだのか？

A. 現実的初期条件の与え方に関する現状

方程式
- 重力場：スカラー、ベクトル楕円型方程式（束縛方程式その他）
- 流体：第一積分の式（例えば、ベルヌーイの式）

A-1：相対論的回転星（大質量星の核、中性子星）

任意の回転則に対して、平衡形状を求める必要あり。

➡ 1989年小松−江里口−蜂巣以降可能。

A-2：連星中性子星

渦度ゼロの準平衡形状を用意する必要あり。

➡ 1999年瓜生、Bonazzola-Marck-Gourgoulhon以降可能。

A-3：連星ブラックホール、ブラックホール-中性子星

未だにもっともらしい初期条件は存在しない。

B．アインシュタイン発展方程式に対する定式化

Standard 3+1(ADM) : Evolve $\left(\gamma_{ij}, K_{ij}\right)$

(3metric & extrinsic curvature)

12 hyperbolic equations

(Arnold, Deser, Misner 1962; York 1979)

⟹ 不安定

(発散する数値的・非物理的モードが存在するため)

数値計算に適した形式

Modified 3+1 (Nakamura 87, Shibata-Nakamura 95, S 99):

1例

$$\begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_{ij} = \gamma^{-1/3}\gamma_{ij}, \quad \gamma = \det\left(\gamma_{ij}\right), \quad F_k = \delta^{ij}\partial_i\tilde{\gamma}_{jk}, \\ K = K_{ij}\gamma^{ij}, \quad \tilde{A}_{ij} = \gamma^{-1/3}\left(K_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}K\right) \end{pmatrix}$$

12 hyperbolic eqs. for $\left(\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{A}_{ij}\right)$

+5 auxiliary nonhyperbolic eqs. for $\left(\gamma, K, F_i\right)$

+appropriate use of constraints equations and $\det\left(\tilde{\gamma}_{\mathrm{ij}}\right)=1$

for rewriting the evolution equations

⇒ 安定

その他にも、Kidder – Scheel - Teukolsky, Scheel – Lindblom, Alucubierre**らなどの重要な仕事あり。世界的に活発な研究領域である。**
真貝君のポスター参照。

C. 相対論的流体

(1) Wilson流の昔からある方法(人工粘性を付加。)

・比較的簡単にコードが作成可能。
・星の周りに大気を置く必要なし。
・強い衝撃波が発生しなければ、まあよろしい（S９９，００）。
(例：連星中性子星の合体、中性子星の振動)
・強い衝撃波が発生する問題に対しては疑問。
(星の重力崩壊、超新星爆発)

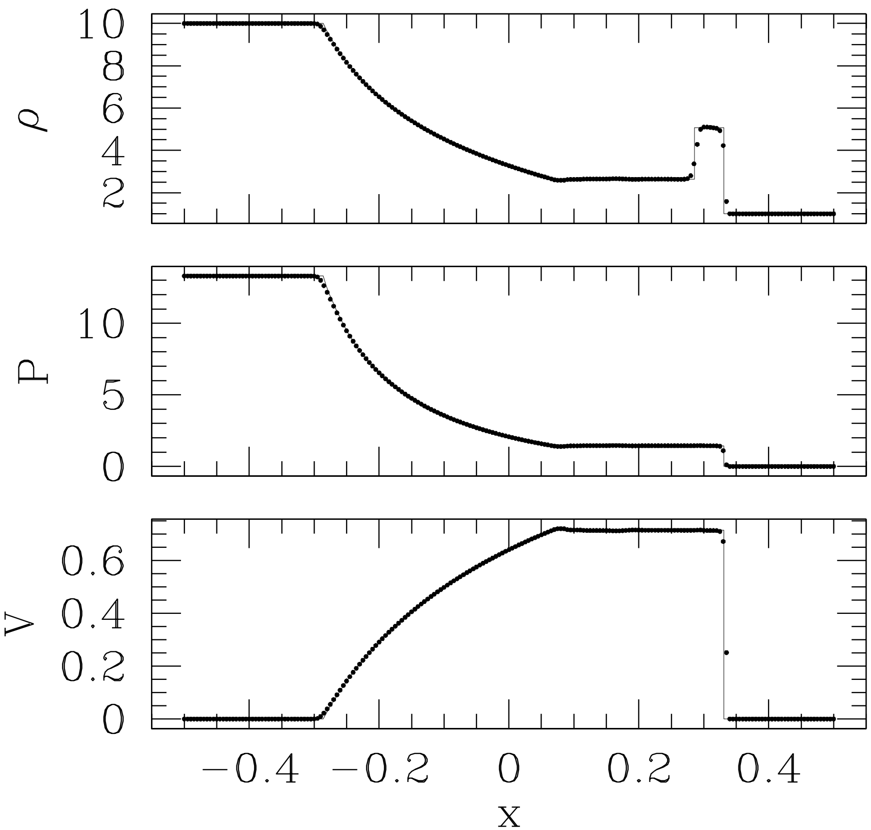
(2) 最近:特性曲線に沿って解く（例；ロー法）

(Valencia（スペ）, Munchen（独）で近年研究されてきた。
Toni Font, http://www.livingreviews.org/Articles/)
重力崩壊など、衝撃波が本質的になる場合にも有効。

特殊相対論における標準的テスト

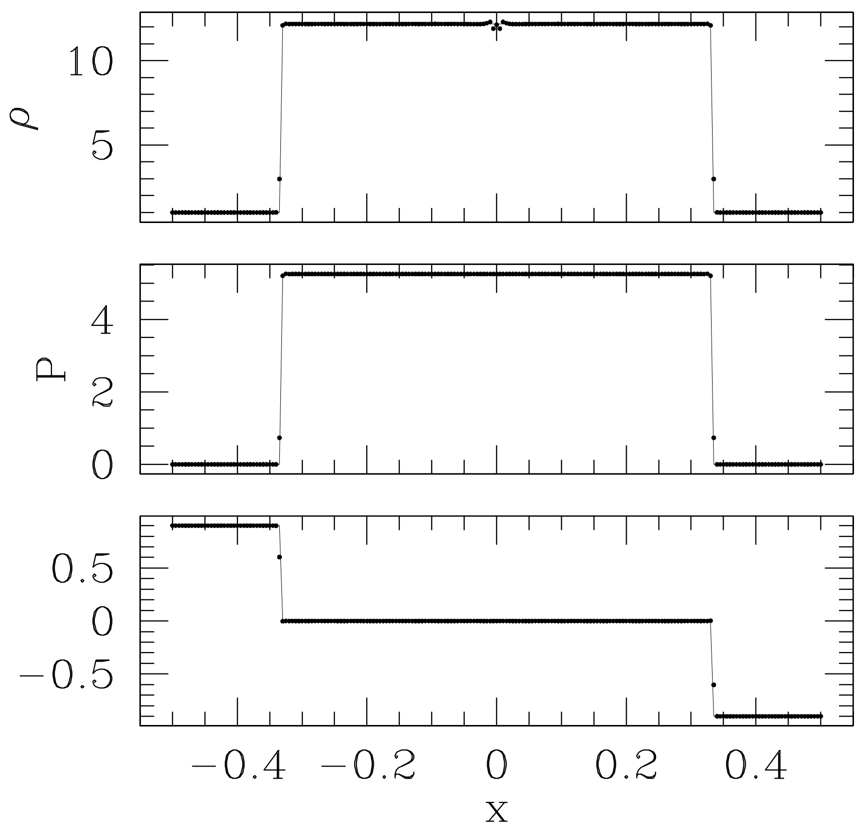
(この私の計算例では3次Roe法もどきを使用)

Riemann Shock Tube



N = 400, Γ = 5/3

Wall Shock



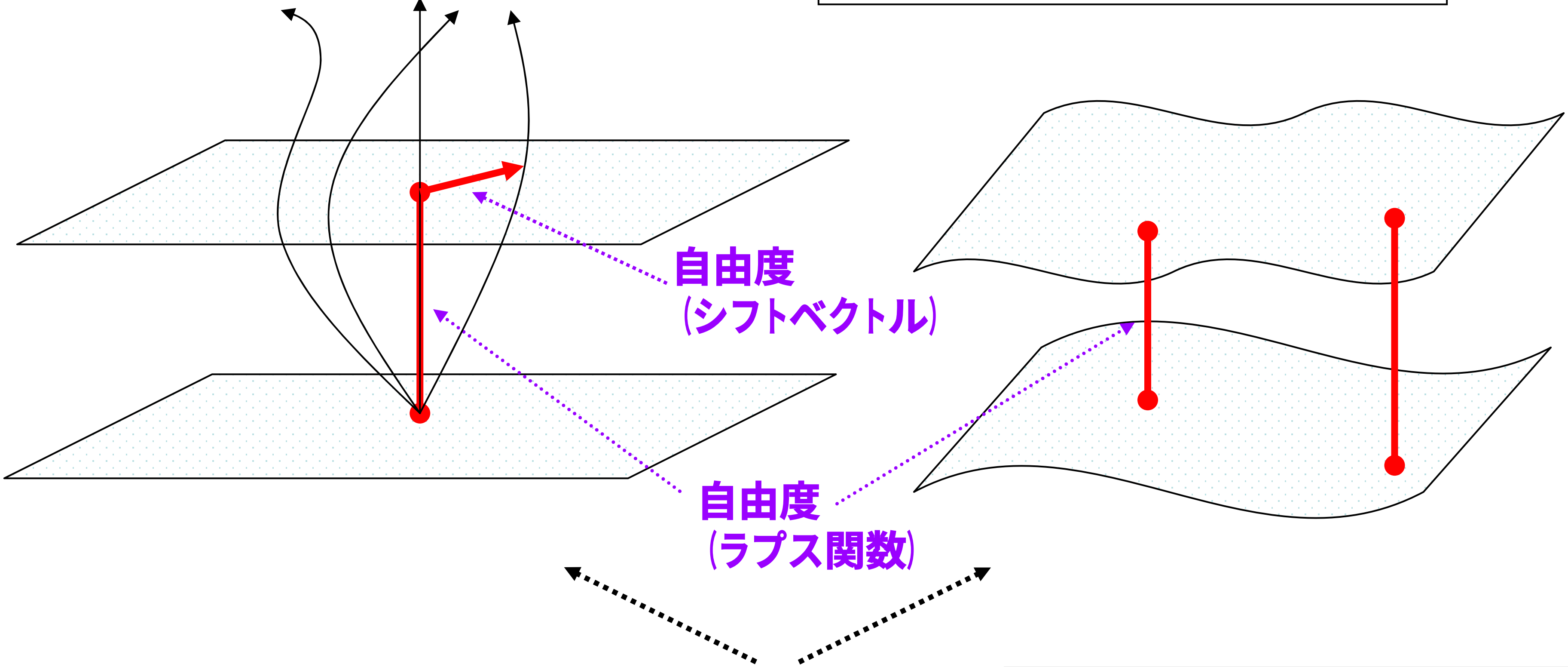
V = 0.9.

N = 400, Γ = 4/3

200点だけプロット

D. ゲージ条件 (座標条件)

どのように時間方向を選んでも構わない。 ⟺ 垂線からのずれの自由度
=シフトベクトルの自由度

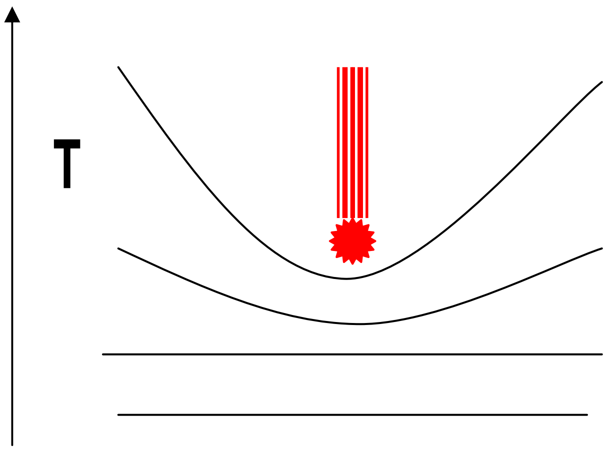


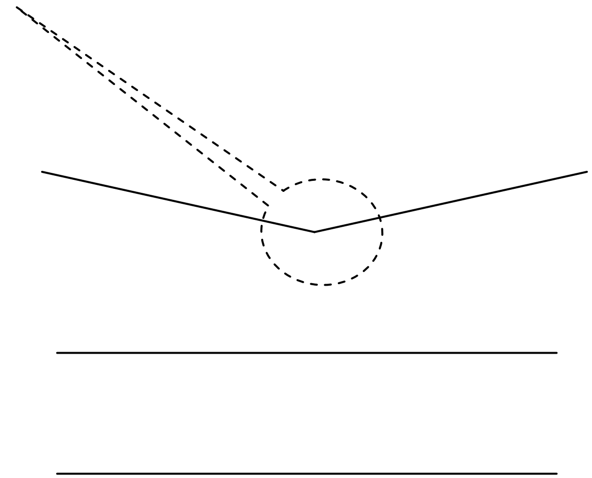
どのような形に時間一定の空間面を選んでも構わない。 ⟺ 垂線の距離の自由度
＝ラプス関数の自由度

- Slice ： Maximal slicing (ポピュラー)

  -- ブラックホール形成時に特異点を避ける。

  -- 座標特異点を避ける。





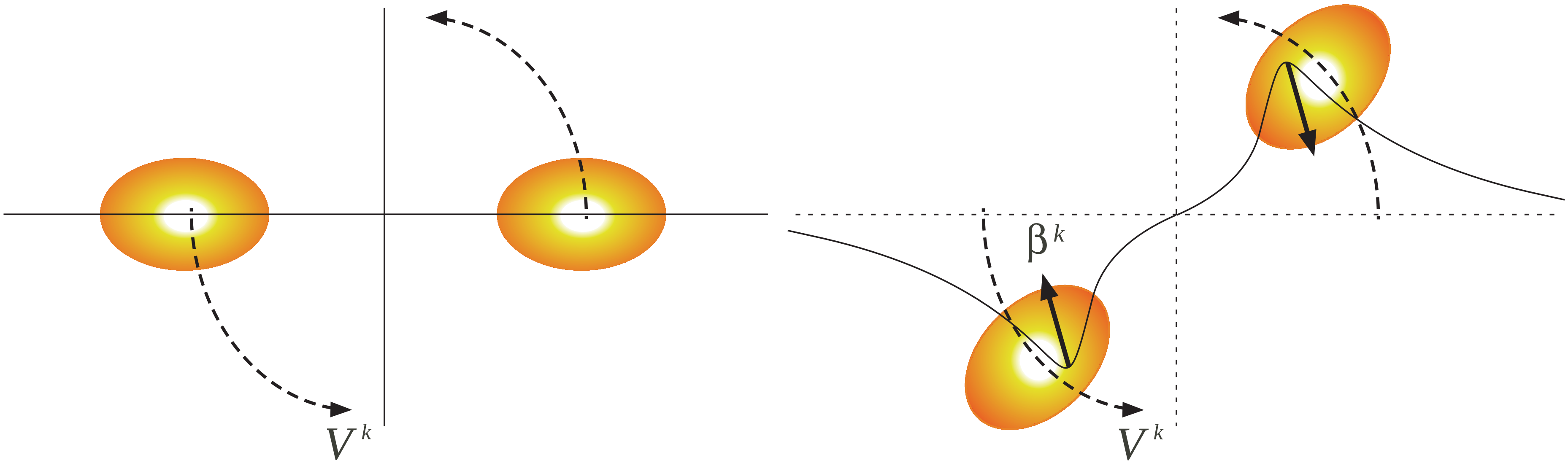
球対称計算でもチェック可能

- Spatial gauge : Minimal distortion gauge

  (Smarr＆York、７８)

  -- 座標のゆがみやねじれを発生させない。

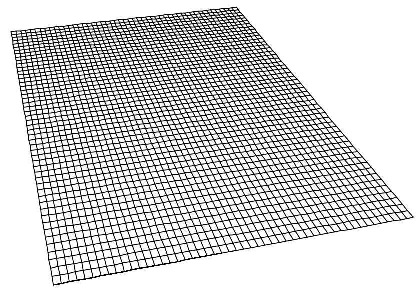
本質的に３Ｄ問題



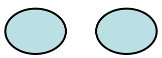
Frame dragging ⟹ **座標が捻じれる。**

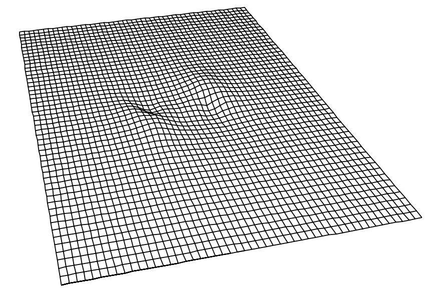
座標変換自由度（シフトベクトル）で捻じれを抑える。

赤道面上での3次元計量のある成分(γ_{xx})の時間発展：zero shift vector

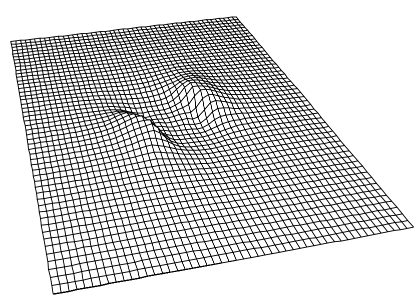


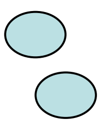
T=0





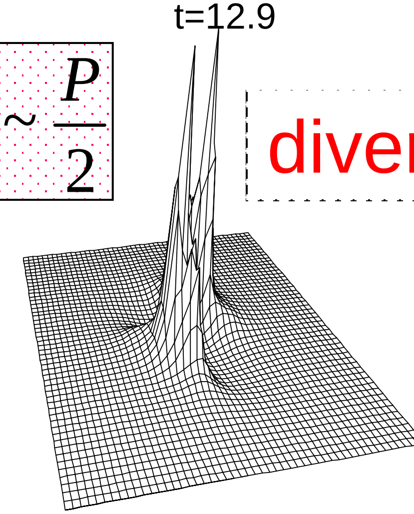
T~P/6



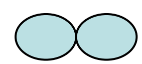


T~P/3

$$\gamma_{xx} - 1 \approx 2 \quad \text{at} \quad t \sim \frac{P}{2}$$



diverge

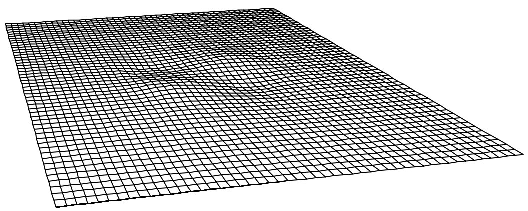


座標ゆがみが単調に積もる.

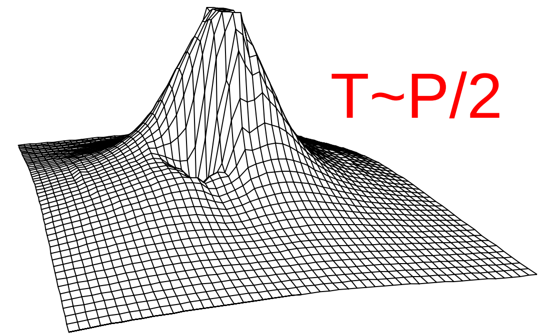
Minimal distortion gauge (もどき) の場合

t=4.7

T~0



t=12.5



T~P/2

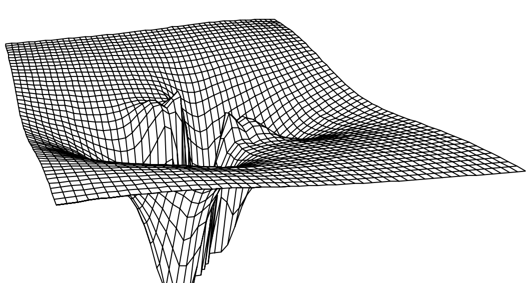
T~0

Metric (γ_{xx}) **は単調に振動**

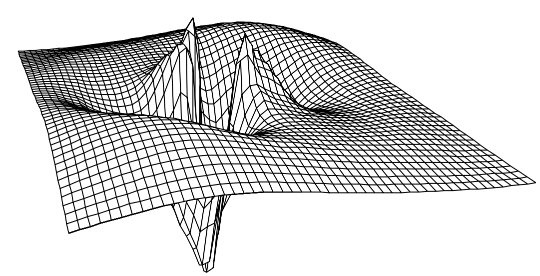
$$|\gamma_{xx} - 1| < 0.1 \text{ at } t \sim P$$

T~3P/4

t=19.4



t=26.9



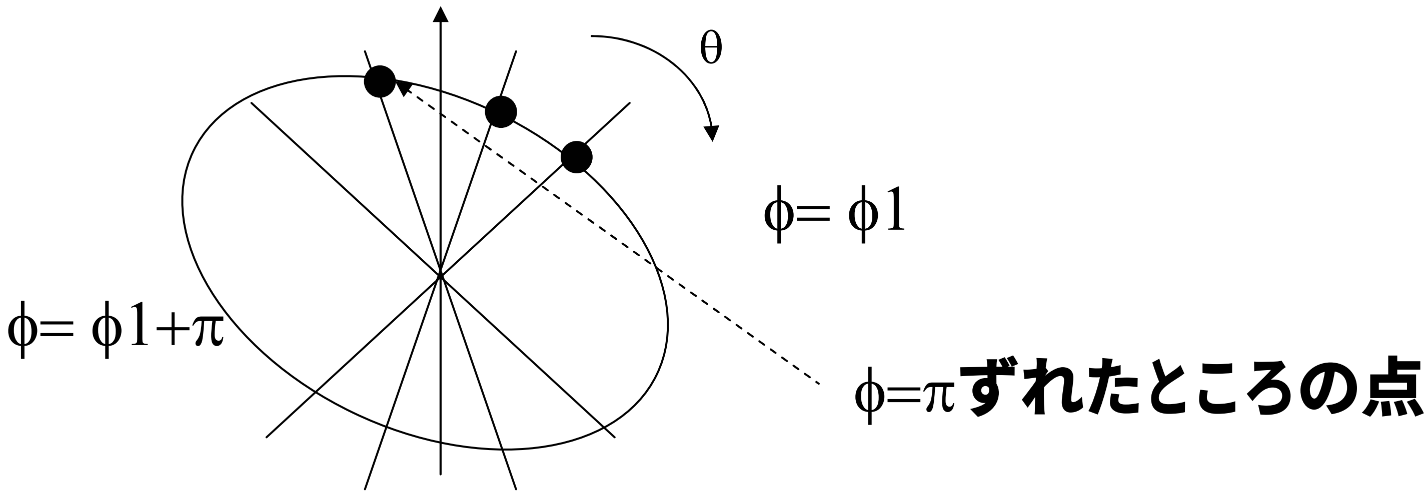
E. 3次元空間に対するApparent horizon finder

面を決める＝ r (θ,φ)に対する楕円型の方程式に帰着

$$\boxed{\Delta_2 r(\theta,\varphi) = S\left[r,\theta,\varphi,g_{\mu\nu},K_{\mu\nu}\right]}$$

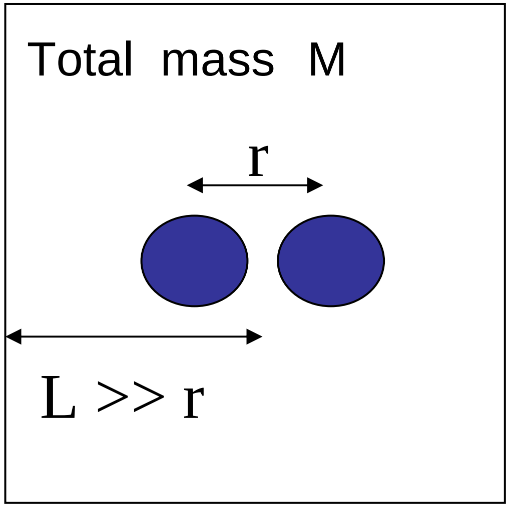
昔：軸上での境界条件が分からないので、どう解いていいか
わからない？？

現在：そんなことはない。簡単に解ける (柴田-瓜生) 。
(境界条件なし)



F. コンピュータ資源（他力本願）

- Machine : FACOM VPP5000 (NAOJ, Vector-Parallel machine)
  - **最大** = 48 PE（720GByte）
  - **実際上** = 32 PE (500GBytes)
- **必要なメモリー:連星の合体を例として。**



$$\lambda_{GW} \le \lambda_{ISCO} \approx 58\left(\frac{GM}{c^2}\right)\left(\frac{rc^2}{7GM}\right)^{3/2}$$

$$\text{Require}\quad \mathrm{L} \ge \lambda_{GW} \quad \& \quad \Delta\mathrm{x} \le 0.2\left(\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{c}^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{L}}{\Delta\mathrm{x}} \ge 290\left(\frac{rc^2}{7GM}\right)^{3/2} \quad \& \quad \mathrm{N} \ge 580\left(\frac{rc^2}{7GM}\right)^{3/2}$$

典型的グリッド：５０５＊５０５＊２５３（赤道面対称）

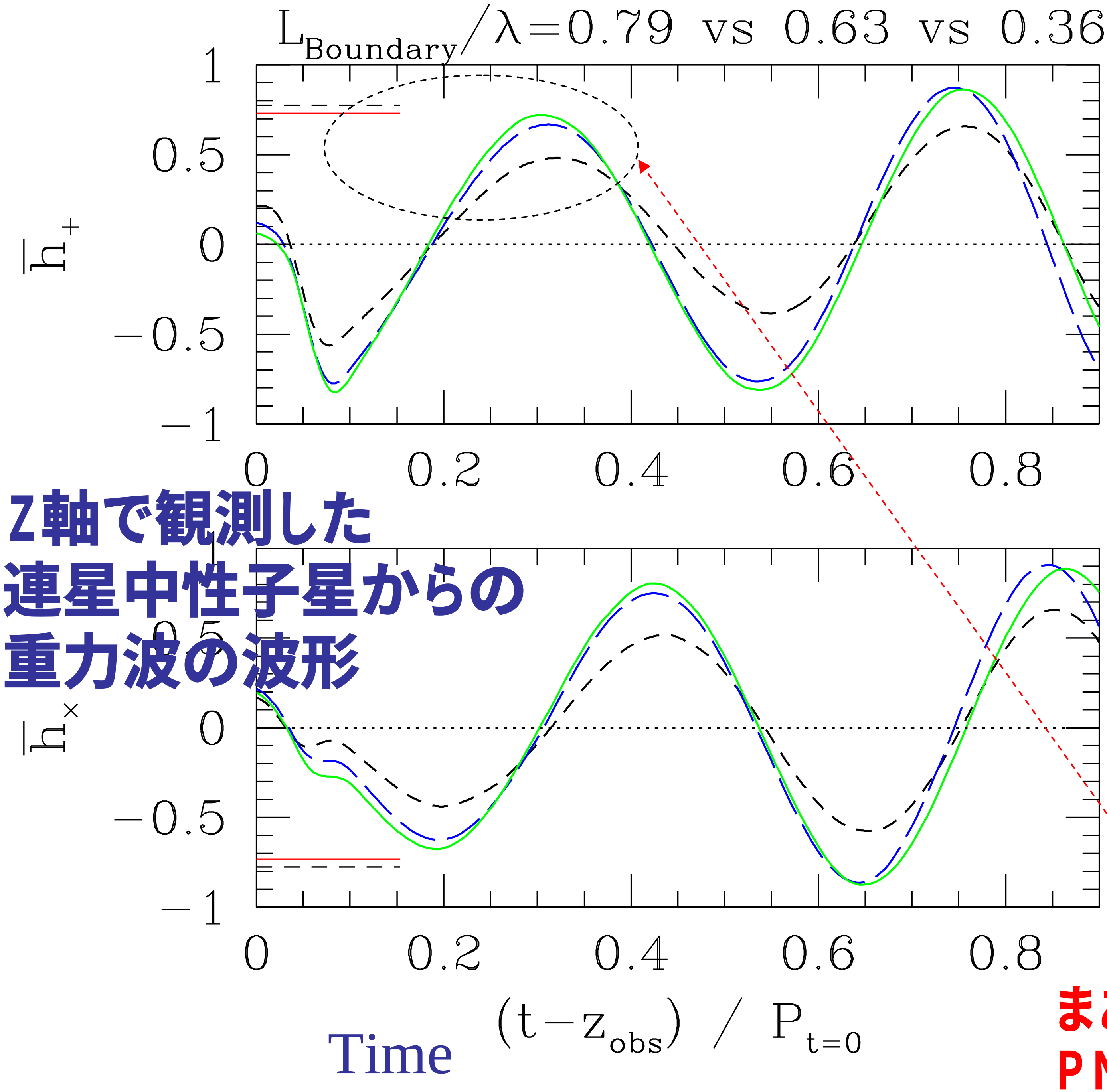
（～120GByte、～100CPU hours、～10000ステップ）

これまで最大：６３３＊６３３＊３１７

（～250Gbyte、～200CPU hours、～10000ステップ）

N=500で十分なわけではないが、必要最小限度には到達。

Z軸で観測した
連星中性子星からの
重力波の波形



M / R = 0.16 case
(R ~13km for M=1.4)

Green：
633＊633＊317

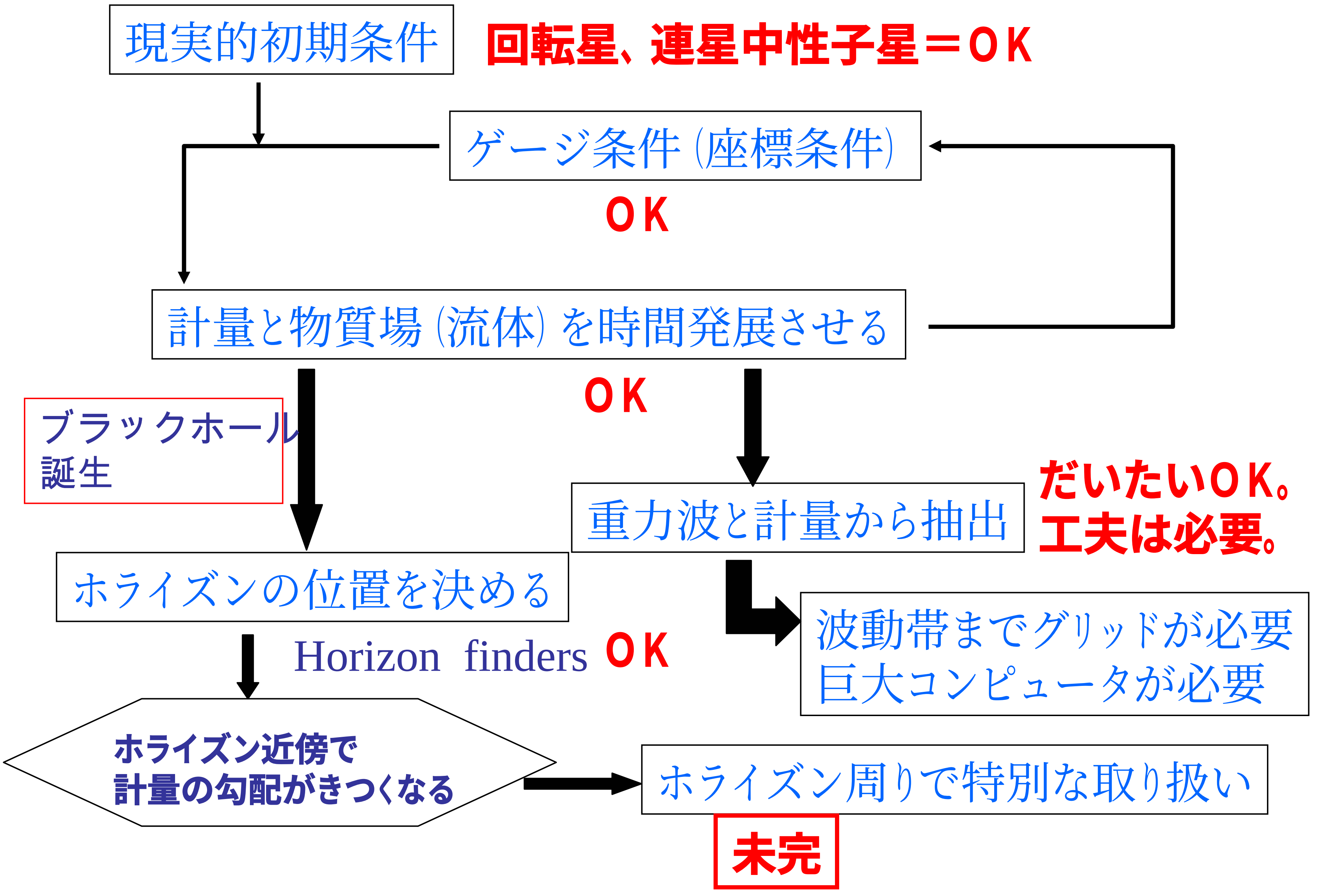
Blue：
505＊505＊253

Dotted Curves：
293＊293＊147

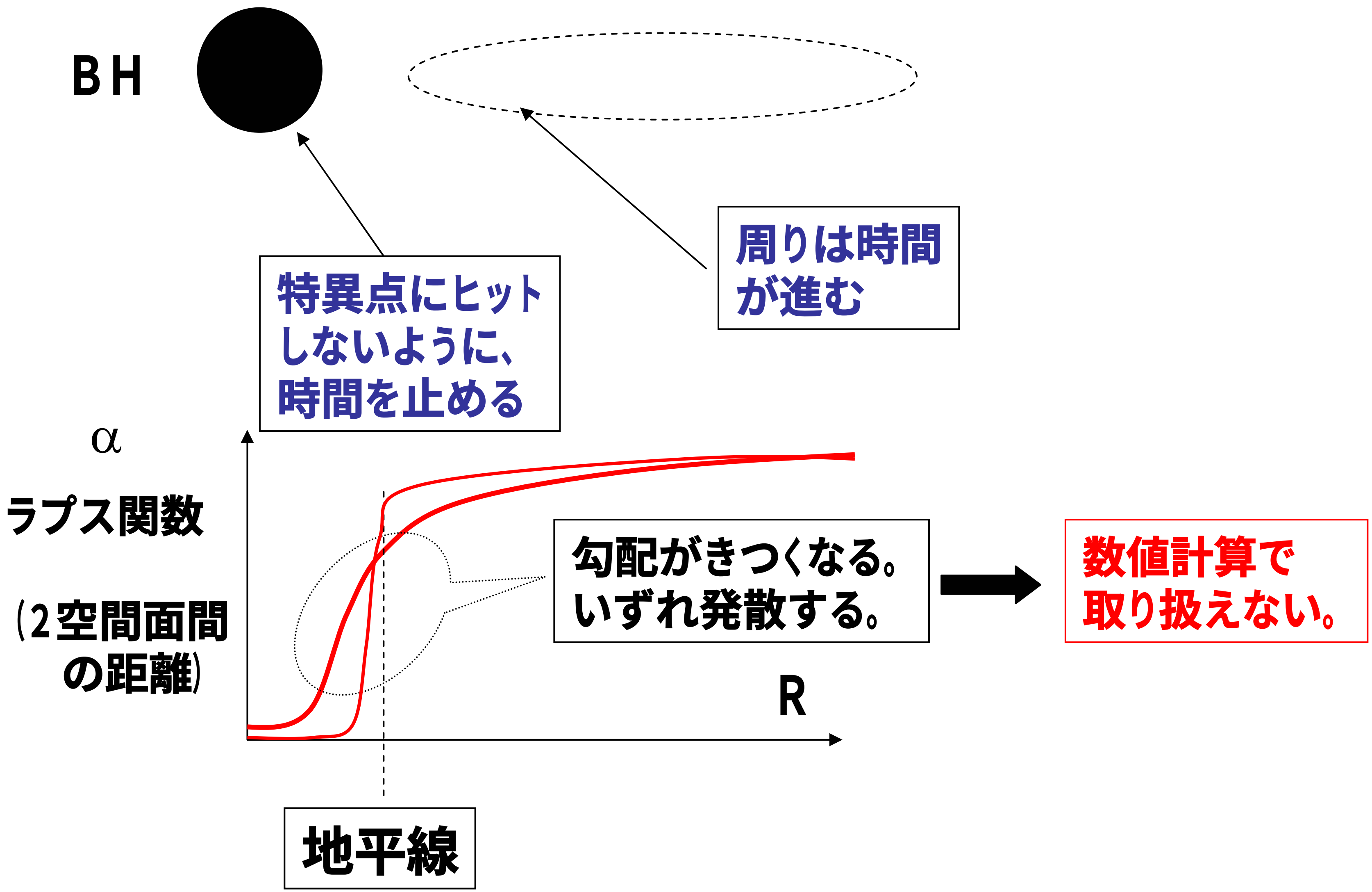
Red：2.5PN amp.

まあまあの収束
PN計算とも一致

必要な要素：現状のまとめ

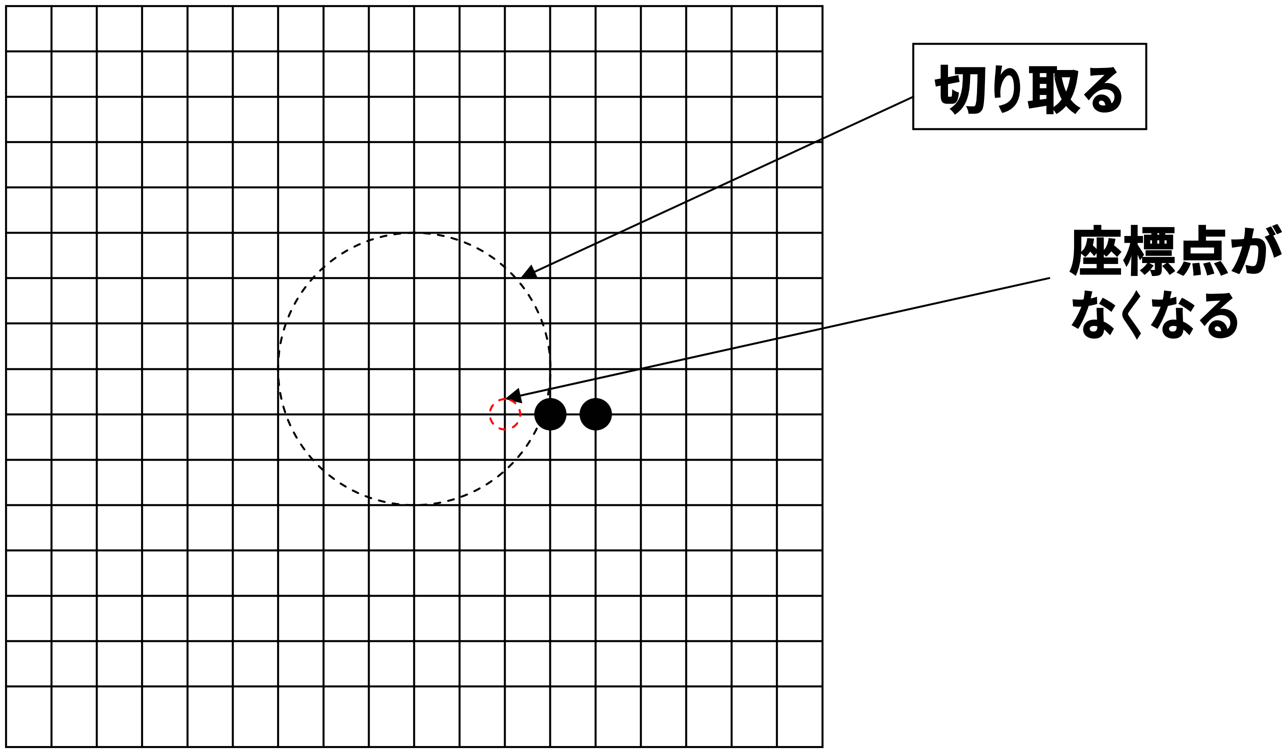


未解決問題：ブラックホールの取り扱い



解決法（Unruh）

地平線の内側を切り取ってしまえ。



境界条件は？　安定な数値計算のための定式化や差分法は？

=>　初めに1BHありきならOK

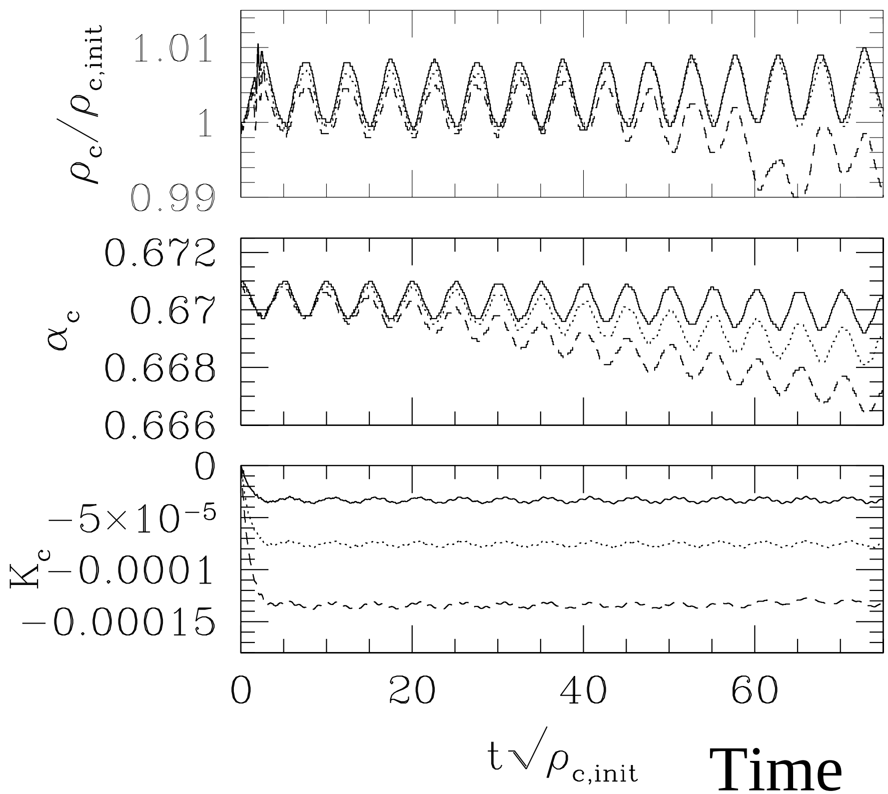
（Potsdam, Cornell, Illinois）。

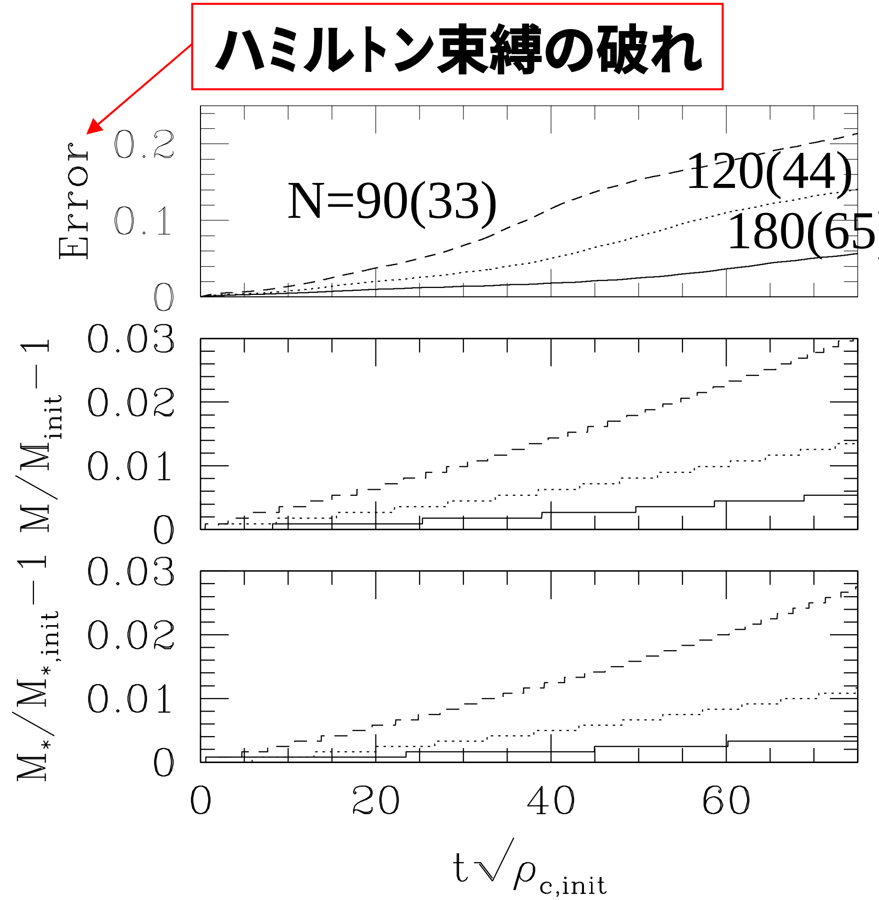
しかし、途中で形成する場合や2BHの場合は未解決

コードチェックについてのコメント

- **既知の解析解との比較**
  - ・特殊相対論流体：
    リーマンショックチューブ問題、壁衝撃波問題。
  - ・ＧＲ（例；Ｓ９９、Fontら０２）
    - 線形重力波（Teukolsky wave）。
    - 安定な球対称星を長時間安定に保つ。
    - 球対称星の既知の固有振動（球対称、非球対称）。
    - 安定な回転星を長時間安定に保つ。
    - 球対称ダストの重力崩壊。
    - 不安定な星の重力崩壊。
      ＋形成するブラックホールの質量のチェック。
- **収束性のテスト**：２次のコードなら、誤差も２次で収束。
  （ただし、衝撃波が存在すると精度が落ちる）

振動する球対称中性子星の進化(軸対称計算)





EOS: P = (Γ−1)ρε with Γ = 2.

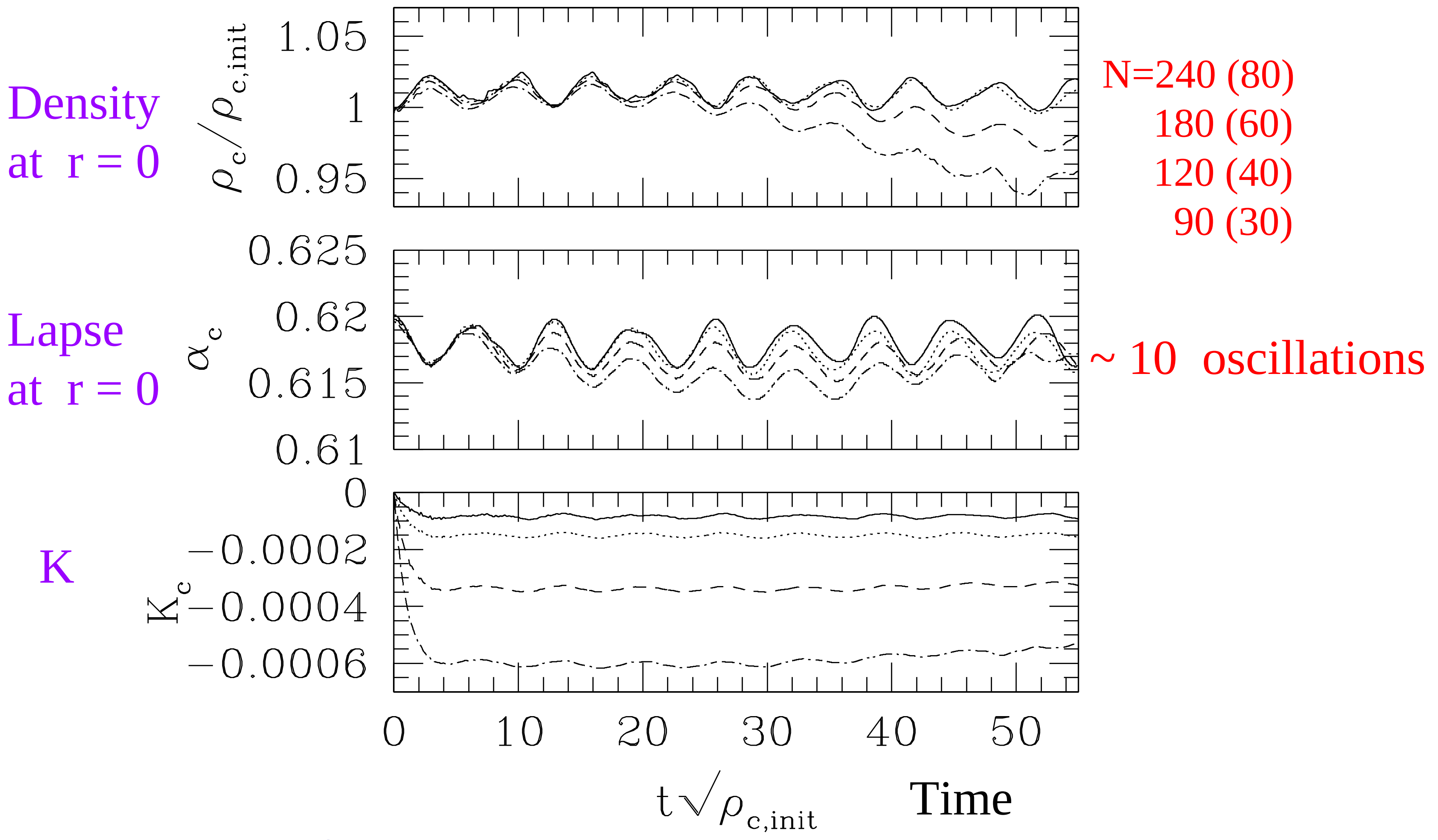
M = 1.4M(solar)、R=14km

(N+1, N+1) grid ; N = 90, 120, 180

NS is covered by 33, 44, 65 points.

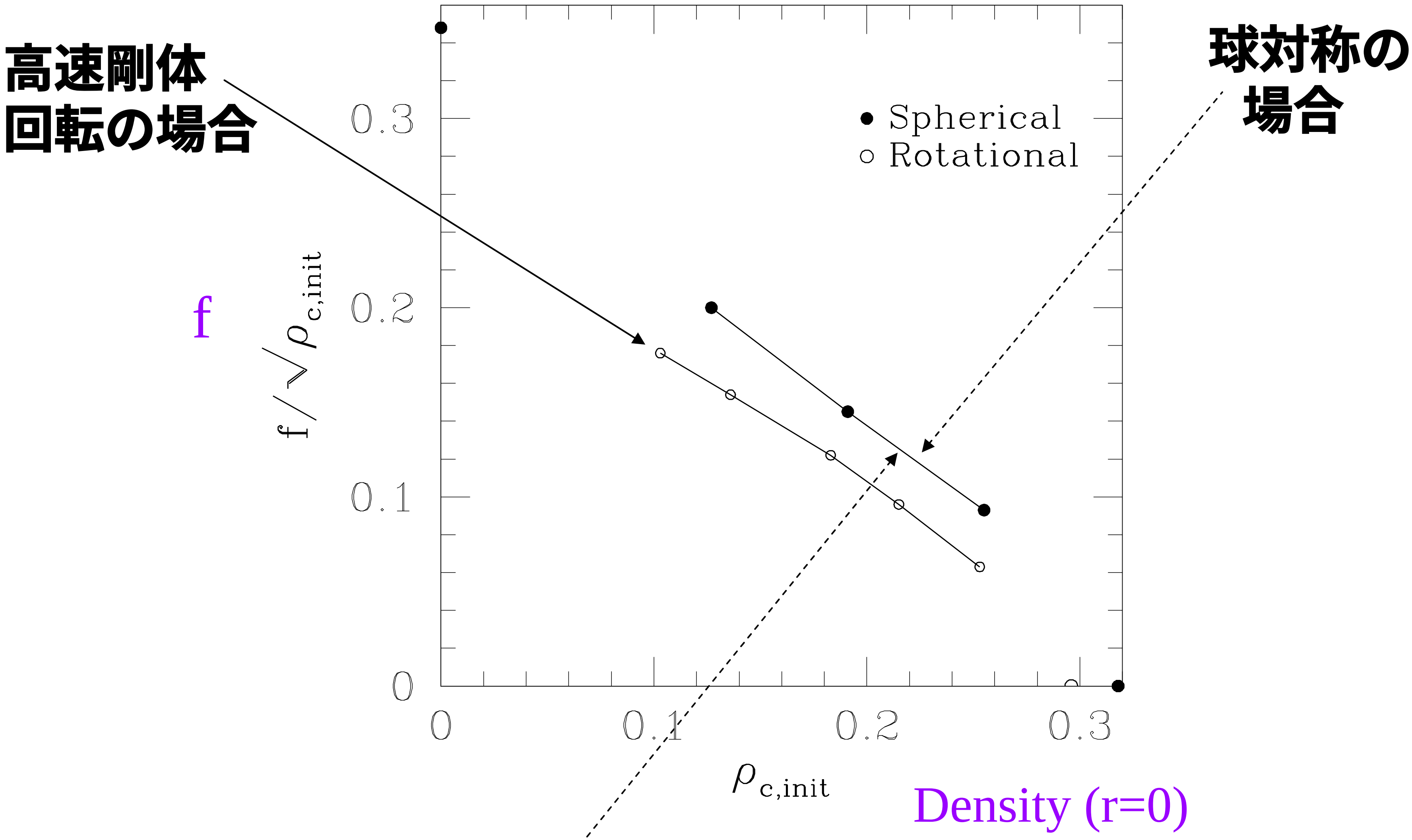
シミュレーションの寿命
~ 30振動周期

高速剛体回転する中性子星の進化



M = 91% of maximum mass

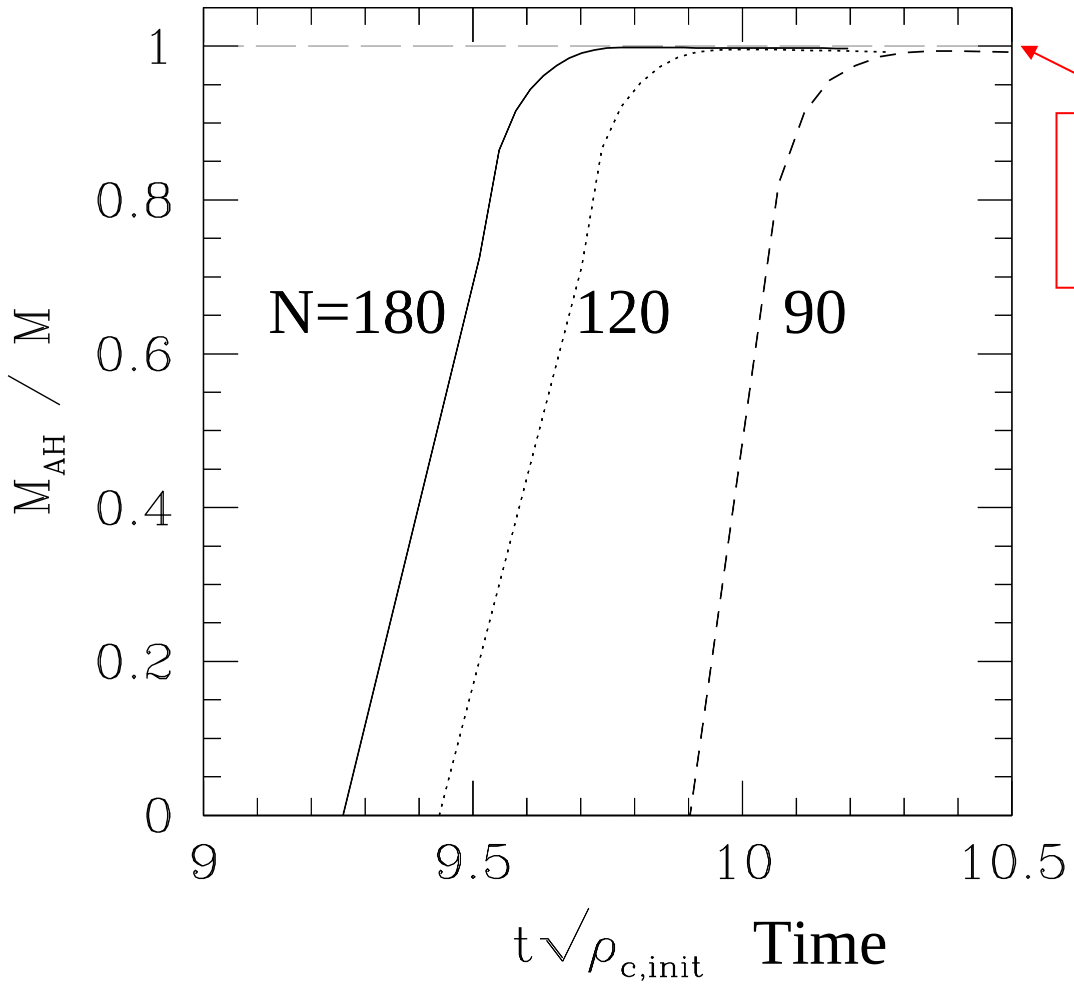
動径振動の固有振動数



チャンドラの公式(‘64)で計算した結果と一致

不安定な球対称中性子星のブラックホールへの重力崩壊

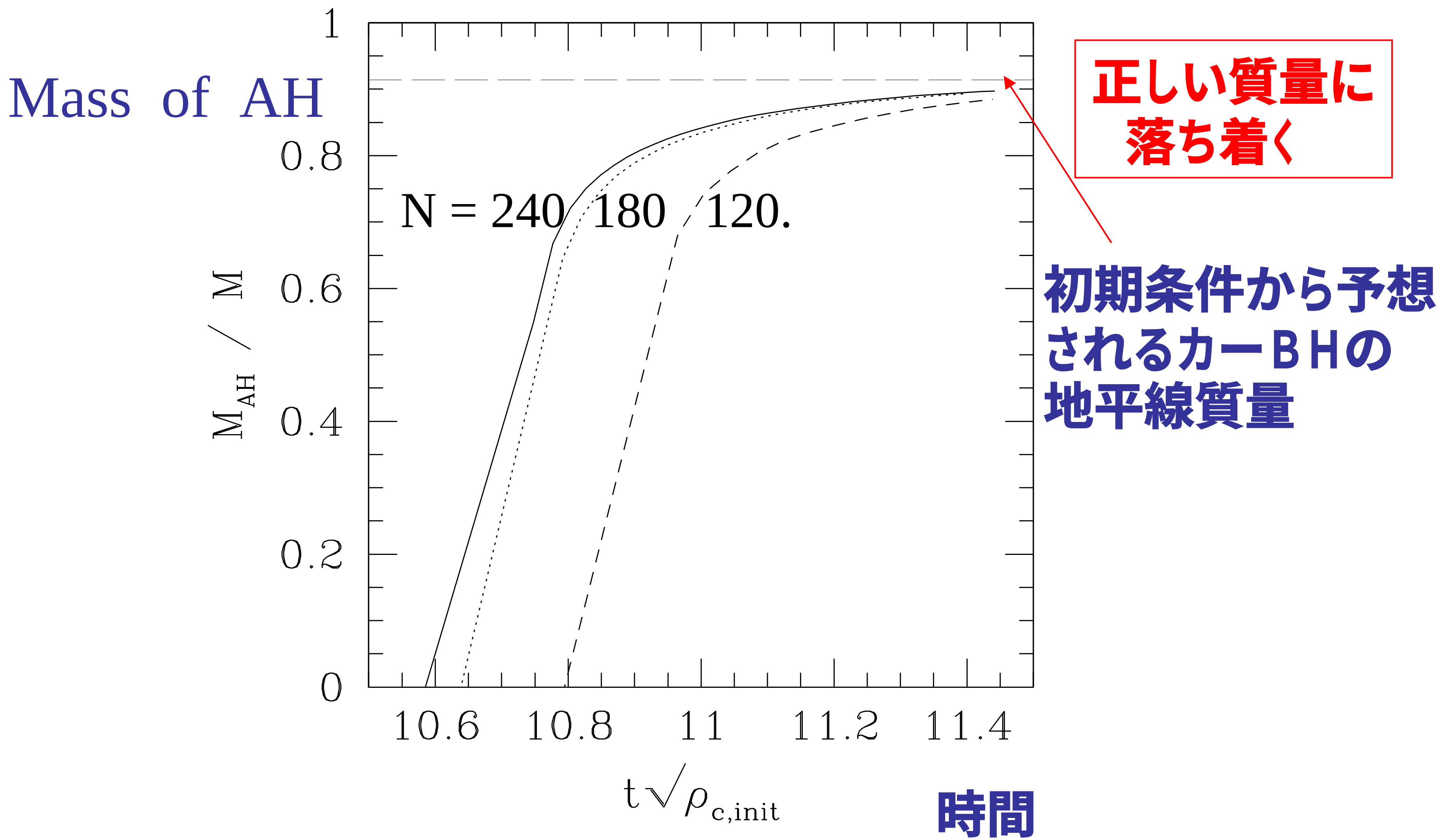
Mass of Apparent horizon in units of ADM mass



正しい質量に落ち着く

NS is initially covered by N/2 points

不安定な中性子星のブラックホールへの重力崩壊（カーパラメータ　a = 0.56）



３．３D数値相対論：私の計算例

- **現在比較的容易に(講演者が)実行可能な対象**：
  連星中性子星の合体（次の大原さんの話も参照）
  回転中性子星の動的安定性など
  （重力崩壊、非軸対称不安定性）

- **興味はあるが手付かず**：
  ブラックホール―中性子星連星の合体、潮汐破壊

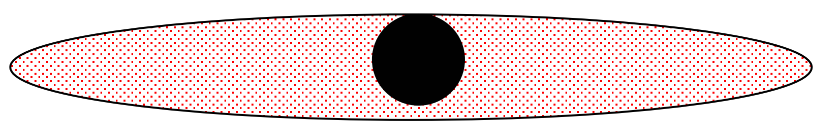
連星中性子星の合体：まず動機

・合体で誕生するのは、中性子星かブラックホールか？

$1.4M_{\odot} + 1.4M_{\odot} = 2.8M_{\odot} > 2M_{\odot}$,　NS+NS=BH?

Maximum mass	Soft EOS	Stiff EOS
Spherical	$\sim 1.5M_{\odot}$	$\sim 2.0M_{\odot}$
Rigid Rotation +20%	$\sim 1.8M_{\odot}$	$\sim 2.4M_{\odot}$
Differential Rotation +>50%	$>2.3M_{\odot}$	$>3.0M_{\odot}$

・合体後、ブラックホールが誕生したならディスクは形成されるか？



?

・重力波の特徴は？特徴的周波数は？

たぶん、周波数は3kHz程度なので、普通のレーザー干渉計で検出するのは困難。しかし、特殊なデザインの干渉計やバー型検出器のよいターゲットには？

セットアップ：現状 (柴田ー瓜生、PTP107, '02)

・状態方程式　t = 0： $P = K\rho^\Gamma$

t > 0： $P = (\Gamma-1)\rho\varepsilon$：　$\Gamma = 2$ & 2.25　(Here 2.25)

初期条件＝準平衡状態(瓜生、谷口)

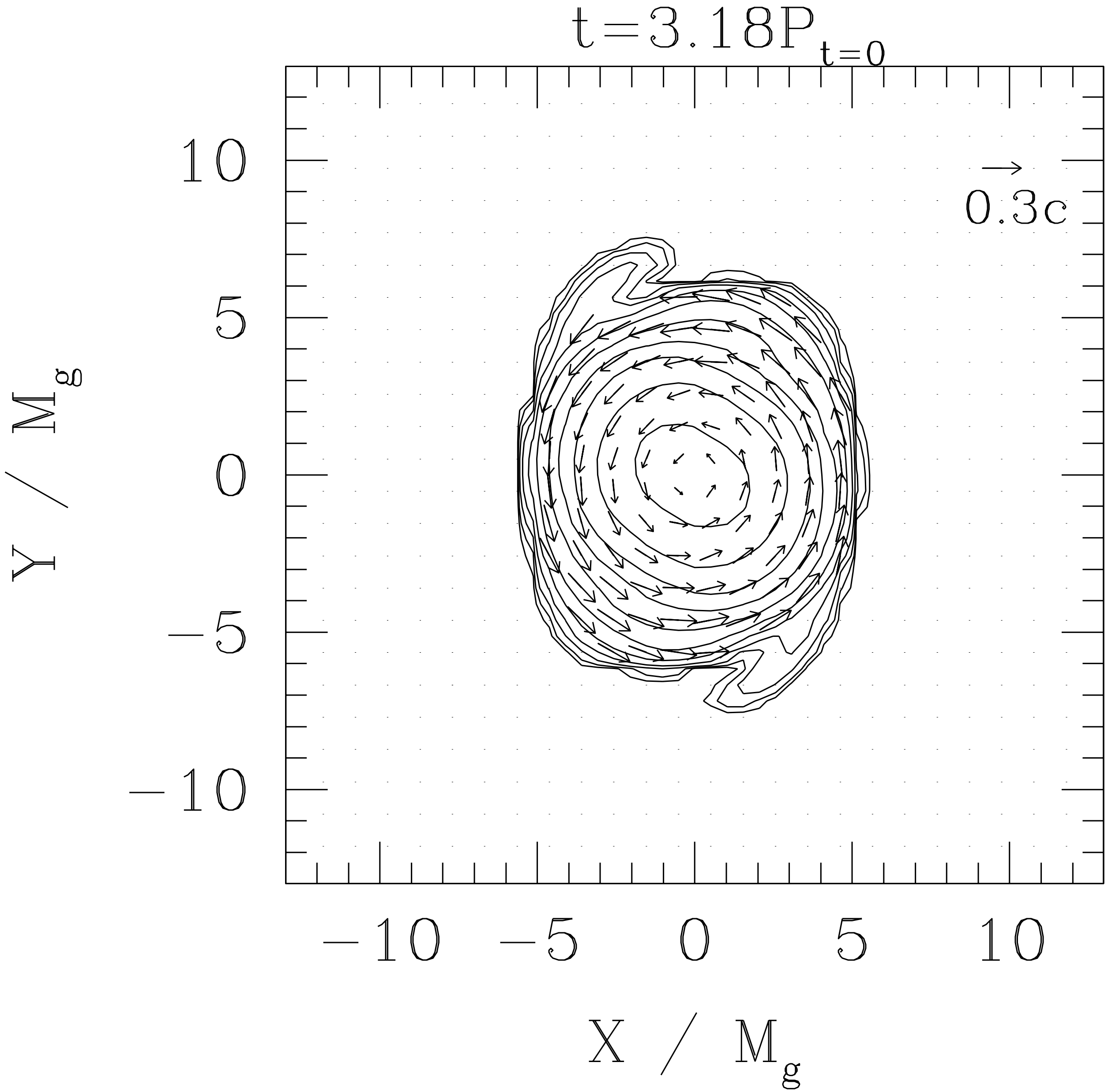
Compactness $(M/R)_\infty$	Total rest mass $M_{*\,TOTAL}/M_{*Max}(J=0)$	(Kerr parameter) Spin parameter J/M^2	m_2/m_1
● 0.12 (等質量)	1.16	1.00	1
● 0.14 (等質量)	1.35	0.95	1
● 0.16 (等質量)	1.50	0.91	1
● 0.12 vs 0.14	1.25	0.95	0.86
● 0.16 vs 0.18	1.58	0.89	0.905

M_{*TOTAL} : Total rest-mass

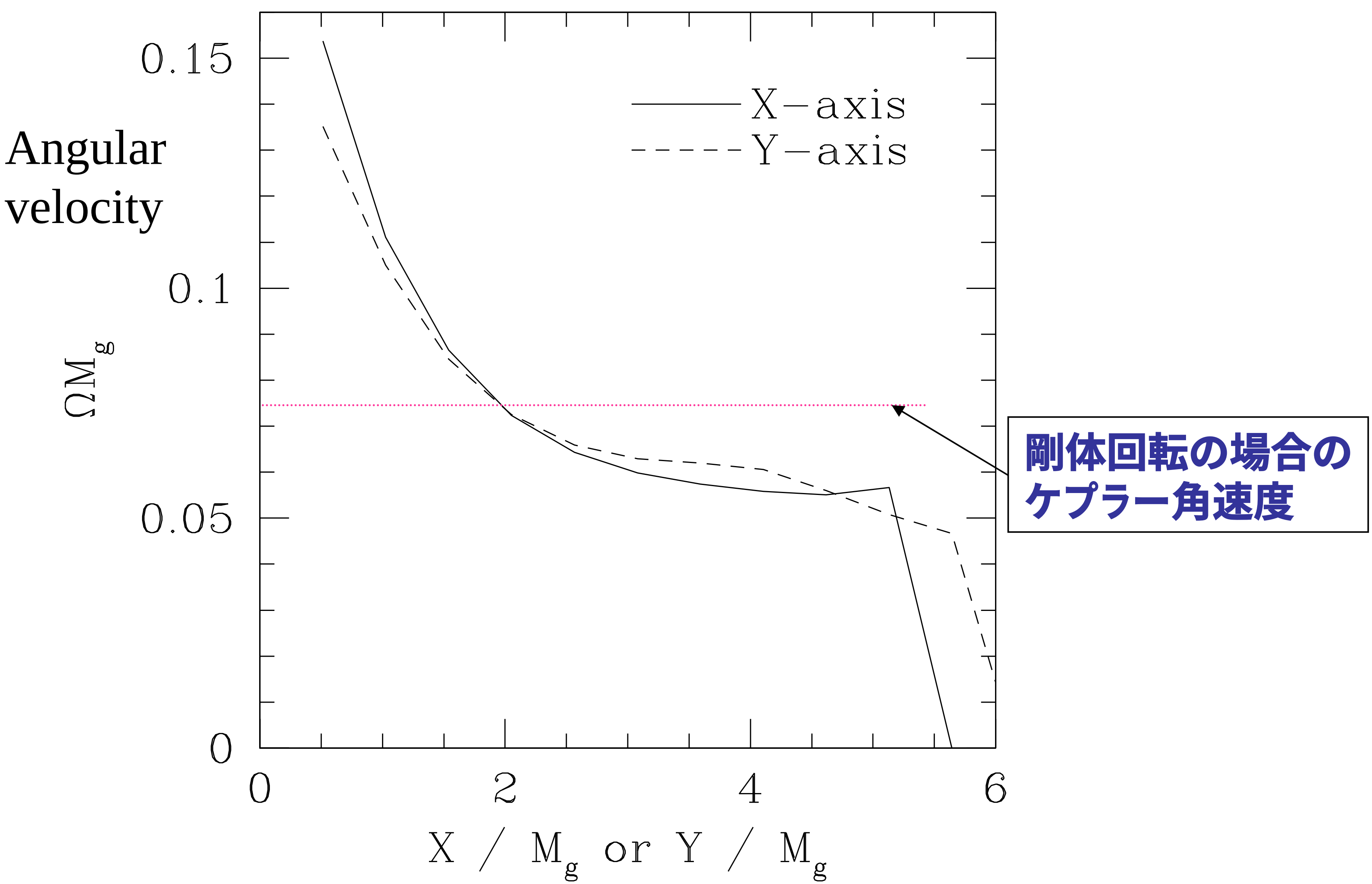
M_{*Max} : Maximum rest-mass of spherical star in isolation

Note (M/R) = 0.14 & 0.16 mean
R = 15km & 13km if M = 1.4 Solar mass

M/R = 0.12 equal mass case : 重い中性子星の形成

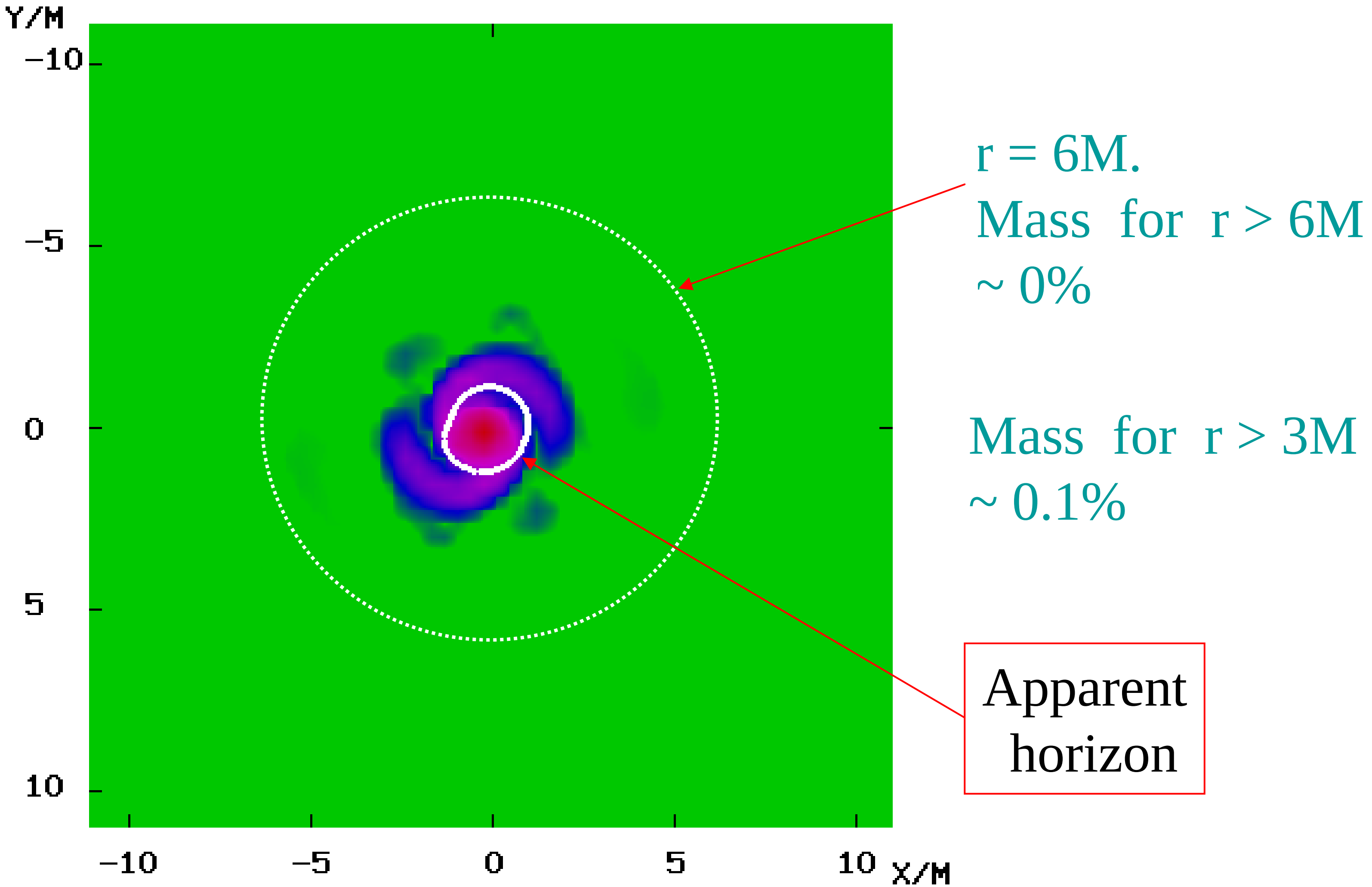


形成された重い中性子星 ＝ 高速差動回転



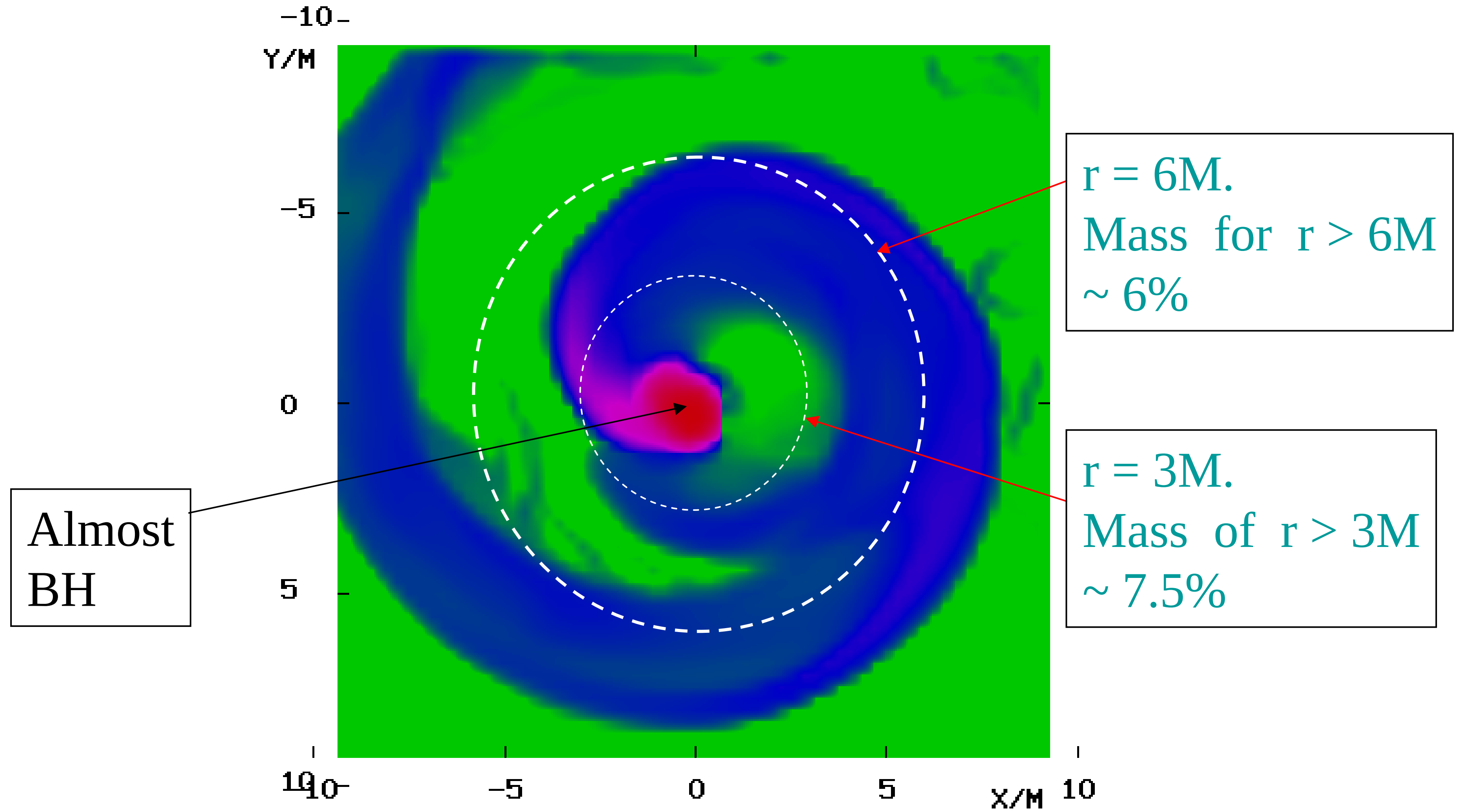
ブラックホール誕生時のディスク質量

＝Negligible for merger of equal mass.



非等質量合体におけるディスクの質量

質量比およそ0.9



Disk mass ~ 0.1 Solar_mass

合体後に形成される天体に関するまとめ

等質量の場合

- Low mass cases

  数秒程度は生き延びるであろう重い中性子星

- High mass cases

  ブラックホール。周りにディスクは形成されない。

１０%程度質量が異なる場合

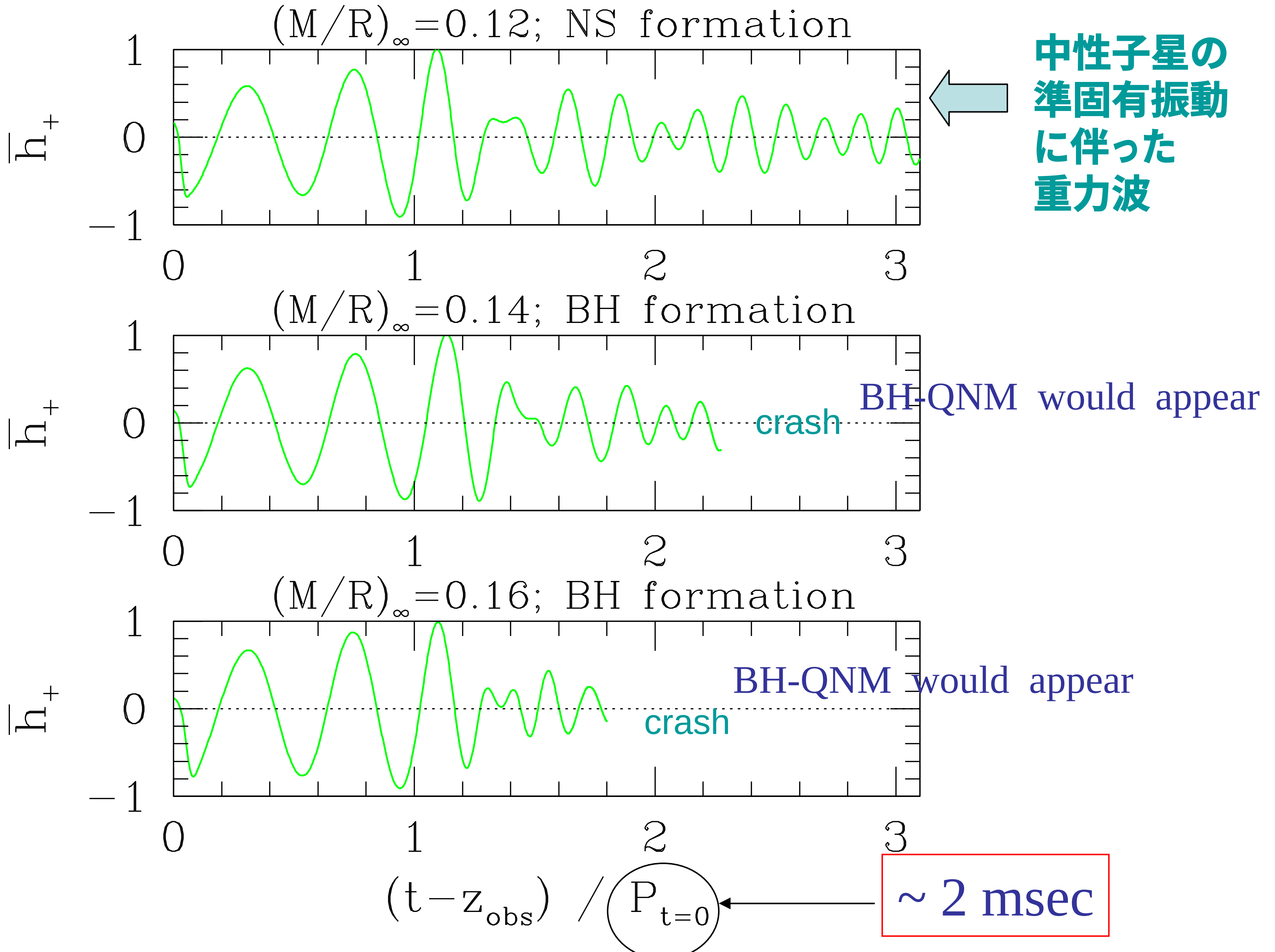
- Low mass cases

  数秒程度は生き延びるであろう重い中性子星

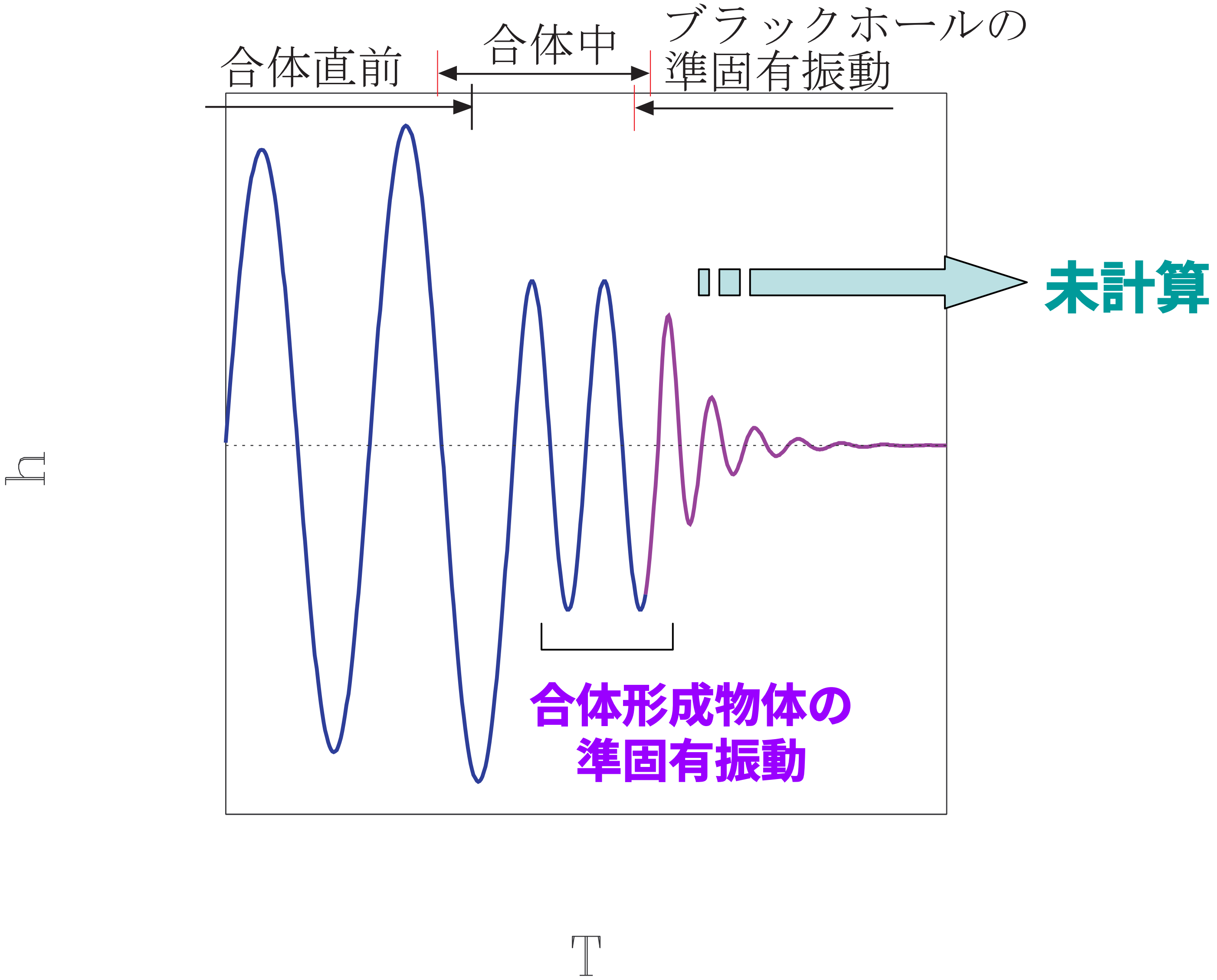
- High mass cases

  ブラックホール。ディスクが形成されうる。

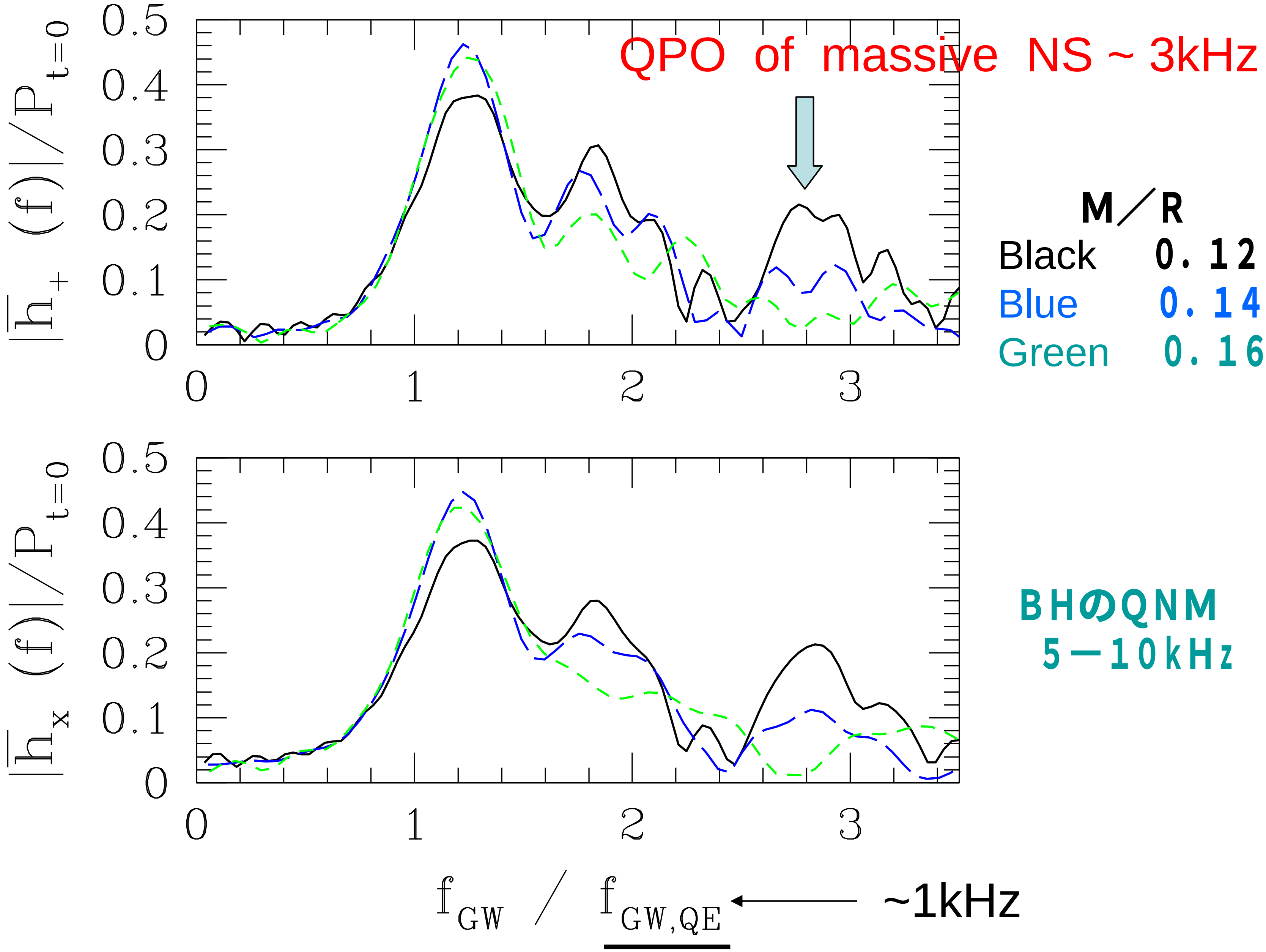
Z軸で捕らえた重力波の波形



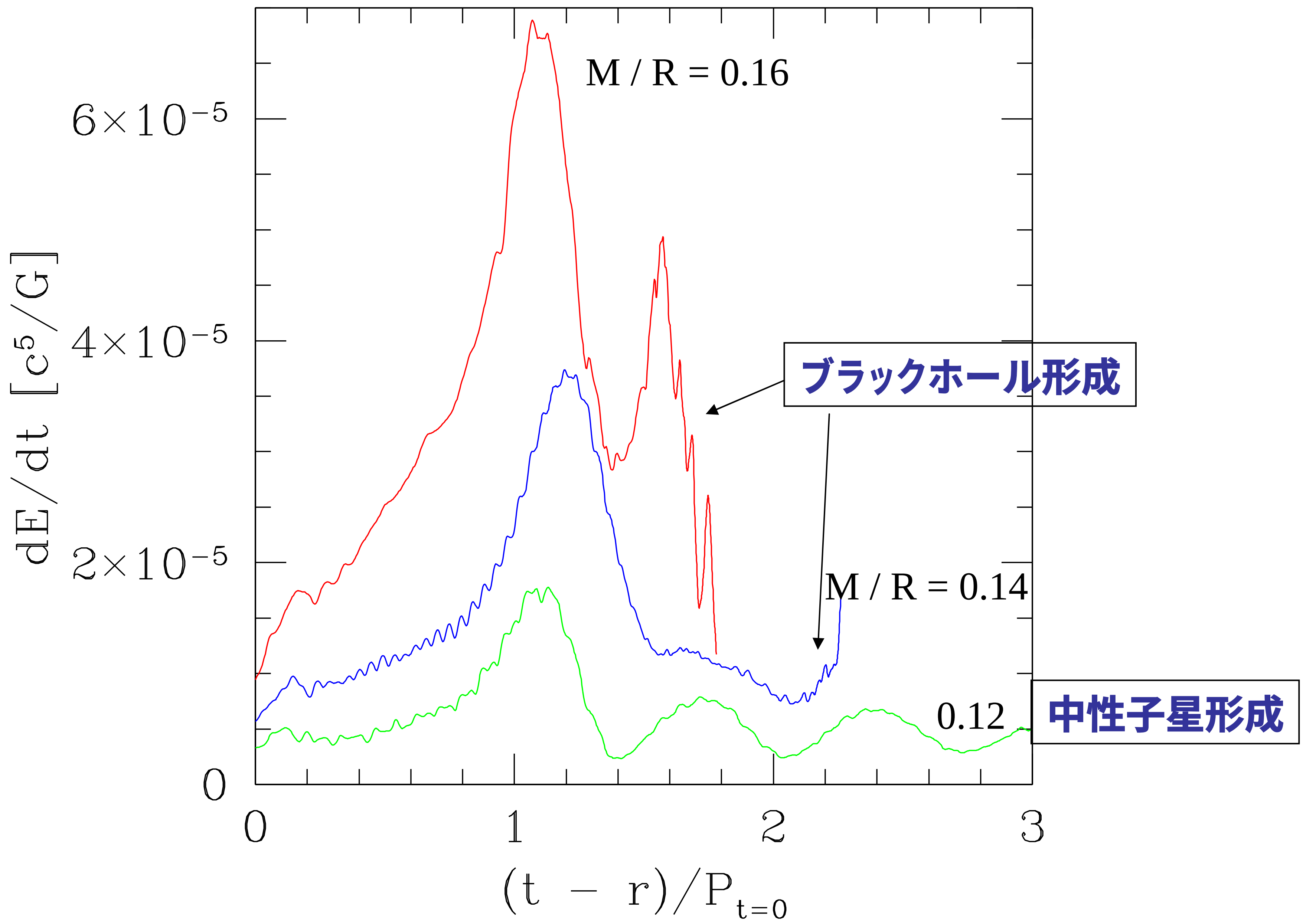
ブラックホールが速やかに形成する場合の予想重力波波形



重力波の波形のフーリエスペクトル



重力波光度


M / R = 0.16
M / R = 0.14
0.12
ブラックホール形成
中性子星形成
6×10^{-5}
4×10^{-5}
2×10^{-5}
0
0
1
2
3
dE/dt [c^5/G]
$(t - r)/P_{t=0}$

重い中性子星の運命

- GW Luminosity $\dfrac{dE}{dt} \approx 10^{-6}\left(\dfrac{c^5}{G}\right)$
- Potential energy $W \sim \dfrac{GM^2}{2R} = 0.1Mc^2\left(\dfrac{5GM}{Rc^2}\right)$
- Kinetic energy $T \sim (0.1\text{-}0.2)W \sim 10^{-2}Mc^2\left(\dfrac{5GM}{Rc^2}\right)$

M : Mass, R : Typical radius of massive NS

$$\Rightarrow \text{ GW emission timescale } \sim \boxed{\dfrac{T}{dE/dt} \sim 10^{-1}\left(\dfrac{M}{3M_{\odot}}\right)\left(\dfrac{5GM}{Rc^2}\right)\ \text{Sec}}$$

重力波放出後に角運動量を失い、重力崩壊

４．大規模・軸対称数値的相対論

何故今、軸対称に回帰?

- ポツダムのグループによって、安定に長時間シミュレーションするための、**新しい技法**が考案された
- アダプティブメッシュ法のような特殊な方法に頼らなくても、現状のコンピュータパワーならば、**１０００＾２**のメッシュは簡単に取ることが出来る。
- ３Ｄ計算の前に様々なテストが**安価**で可能。
- **重力崩壊によるブラックホールの形成、**など解決されていない重要な問題が多く残されている。

計算に要するメモリー

- GR　code　：　変数の数、約２００－２５０

$$\boxed{\mathrm{Memory} = 2\mathrm{GBytes}\left(\frac{N_{\mathrm{var}}}{250}\right)\left(\frac{N}{1000}\right)^{2}}$$

- 性能の良いパソコンならＮ＝１０００も十分に可能

何が難しかったのか？

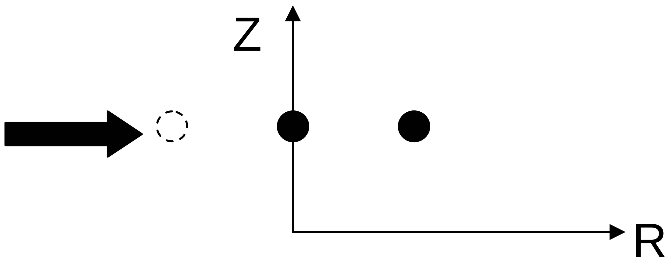
- 軸対称であれば、普通は極座標か円筒座標を使う。

⇒ これらは座標特異点を持つ。

⇒ No negative r, R, θ

⇒ 差分を局所的に変える必要あり

⇒ 数値不安定化し易い



さらに、正則性を保つための工夫も必要。

正則性問題

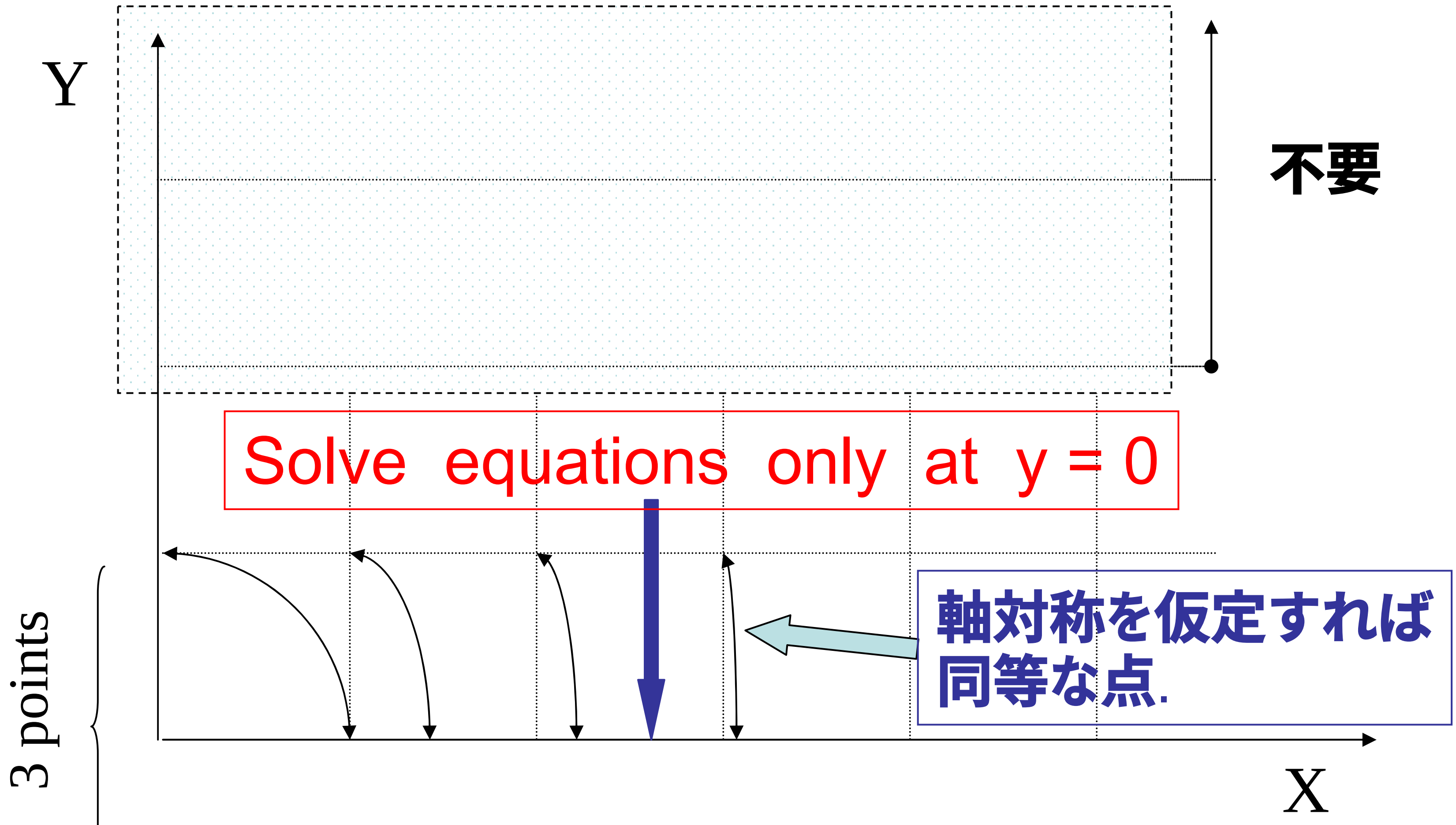
$$\text{Axisymmetry} \Rightarrow L_\xi \gamma_{ij} = 0 : \xi^i = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^i$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{RR} = f_3 + f_1 R^2 \\ \gamma_{\varphi\varphi} = R^2 (f_3 - f_1 R^2) \\ \gamma_{R\varphi} = R^3 f_2 \\ \gamma_{Rz} = R f_4 \\ \gamma_{\varphi z} = R f_5 \\ \gamma_{zz} = f_6 \end{array} \right\} f_i = f(x, y, z) : \text{Regular func.}$$

$$\text{e.g., } \frac{1}{R^2}\left(\gamma_{RR} - \frac{\gamma_{\varphi\varphi}}{R^2}\right) \text{ should be regular}$$

特殊な取り扱いが必要。数値不安定性が頻繁に発生

Cartoon法のレビュー



- x、y、z座標を用いる ＝ 座標特異点なし
- 軸対称境界条件を y=+, -Δyにて付加
- Total grid number = N＊3＊N for (x, y, z)

私の計算例：回転星の重力崩壊

- Parametric EOS (Following Mueller, Dimmelmeier, …)

$$P = P_{\text{Polytrope}} + P_{\text{Thermal}}$$

$$P_{\text{Thermal}} = \left(\Gamma_{\text{Thermal}} - 1\right)\rho\varepsilon_{\text{Thermal}}$$

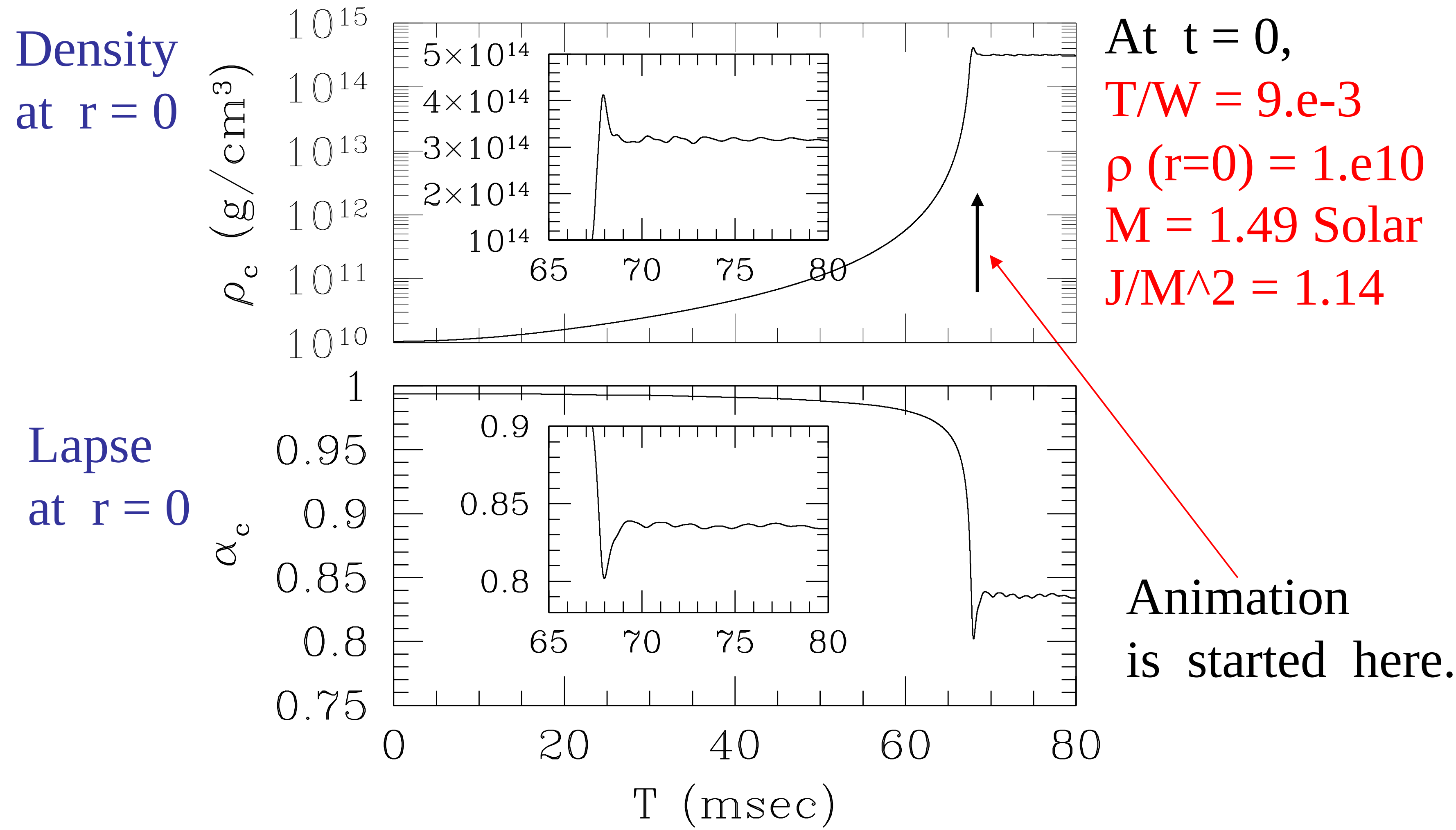
$$P_{\text{Polytrope}} = \begin{cases} K_1\rho^{\Gamma_1} & \rho \le \rho_{\text{Nuc}} \\ K_2\rho^{\Gamma_2} & \rho \ge \rho_{\text{Nuc}} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{\text{Thermal}} = \varepsilon - \varepsilon_{\text{Polytrope}}$$

$$\Gamma_1 \sim \frac{4}{3} \qquad \Gamma_2 \ge 2 \qquad \Gamma_{\text{Thermal}} = 1.5$$

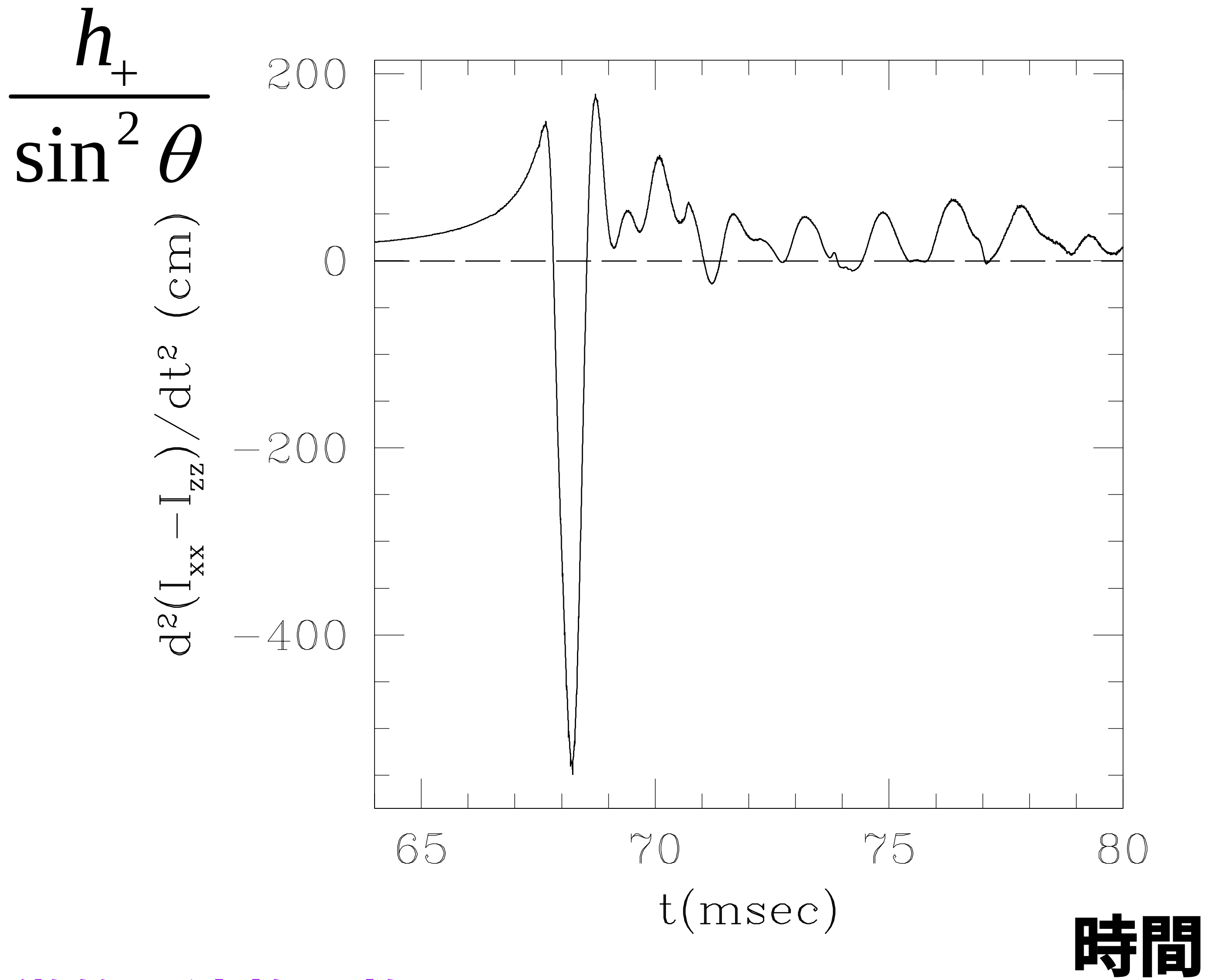
Γ =4/3 & ρ ~ 1.e10 g/cc **の回転平衡形状を初期条件**

Collapse from a rigidly rotating initial condition with central density ~ 1e10 g/cc



Qualitatively the same as Type I of Dimmelmeier et al (02).

重力波の波形



特徴的周波数＝数１００Ｈｚ

５．まとめ

・ 空間3Dの一般相対論的シミュレーションは実行可能である。
　科学的結果　－　例えば連星中性子星の合体後に誕生する
　天体や重力波の波形　－　を得ることができる。

・今後の問題
　・コンピュータの性能に限界があるので、十分な精度の
　計算は未だに難しい。（精度倍にはパワー８倍要）
　　＝〉　ＡＭＲ／ＦＭＲなどの技術開発が不可欠。
　・ブラックホール形成後のシミュレーションの継続。

・ 大規模な軸対称数値的相対論が可能になった。
　ターゲットは以下のような現実的問題の計算：
　　－星の重力崩壊によるブラックホール、中性子星の形成
　　－中性子星のアクリーション起源の重力崩壊
　　－中性子星の相転移、など