「粒子法」　犬塚修一郎（京大・物理）

- 精度と安定性
- 本質的困難（簡単波の崩壊から）
- 流体力学の方程式系（近似の階層構造）
- （物理/人工/数値）粘性項
- SPH法の代数学 ← Godunov SPH の定式化
- 標準テスト問題
- その他の物理
  - 自己重力等の導入法等
- その他（今後）の発展
  - 非球状kernel等、RHD、MHD等
- SPH法とメッシュ法の比較

参考文献

- 「流体力学」ランダウ・リフシッツ
  - 特に第10章「圧縮性気体の一次元流」
- 数値流体力学計算法
  - 「Difference Methods for Initial-Value Problems」 Richtmyer & Morton 1967, (Wiley Interscience)
  - van Leer 1979, JCP **32**, 101 ←シリーズ5作目
- 標準SPH
  - Monaghan 1992, ARAA **30**, 543
- Godunov SPH
  - Inutsuka 2002, JCP **179**, 238

精度←ほぼ無関係→安定性

- 精度＝「打ち切り誤差の大きさ」
  - Taylor展開して比較すれば良い
- 安定性＝「増大（発散）する非物理的な解（モード）を含むかどうか」
  - 線形方程式系ではフーリエ成分に分解して安定性を見れば十分（von Neumann）
  - 非線形方程式系では一般的対処法が無い.

そこで、差分要素ごとの進化を物理的に考慮して安定な計算スキームを得ることを目指す

流体力学の方程式系

- If Reynolds数＝vL/n ≫1 ,

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \nabla \bullet (rv) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(rv) + \nabla \bullet (P + rvv) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \bullet [(E + P)v] = 0$$

$$E = \frac{P}{g - 1} + \frac{rv^2}{2}$$

線形波動

- 無摂動状態＝密度・圧力一定、速度無し
- 無限小摂動の時間発展は双曲型方程式に従う

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-C_s{}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)df=\left(\frac{\partial}{\partial t}+C_s\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-C_s\frac{\partial}{\partial x}\right)df=0$$

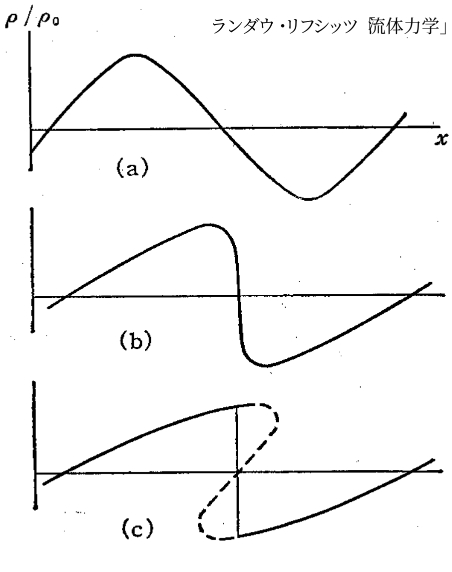
- 一般解は　$df = f(x-C_s t)+g(x+C_s t)$
  但し、*f, g* は任意関数であり、初期条件で決まる.
  c.f. 移流型方程式... $\partial f/\partial t + c\,\partial f/\partial x = 0$

- 現実には**非線形**双曲型方程式を解く

簡単波の非線形切り立ち

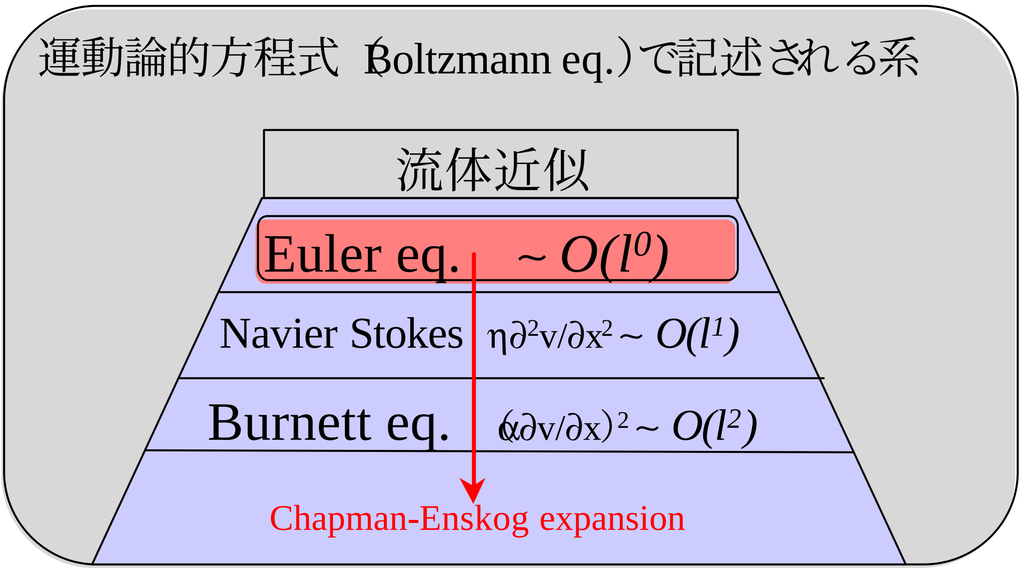
- 有限振幅の音波
  ⇒簡単波（simple wave）
- ほぼあらゆる初期条件から出発して有限時間のうちに解は破綻する.
  ⇒粘性項による散逸
- 微小でも有限の物理的な粘性が必要

ランダウ・リフシッツ「流体力学」より



第 64 図

近似方程式の階層構造



註：ニュートン力学系に限る．相対論的な領域ではGradの方法等．

現実的問題

- Navier-Stokes的粘性項を用いた計算でも…

粘性項の大きさは… $\rho C_s l\, \partial^2 v/\partial x^2 \approx \rho C_s l\, (\Delta v)^2/(\Delta x)^2$

Δxが充分小さくないと粘性項は大きくならない．

⇒ 粘性係数を非物理的に大きくして計算する

⇒ 衝撃波でない場所でも粘性が大きくなる

※必要な粘性の大きさは衝撃波の強さによる．

※しかもその大きさは事前には不明である．

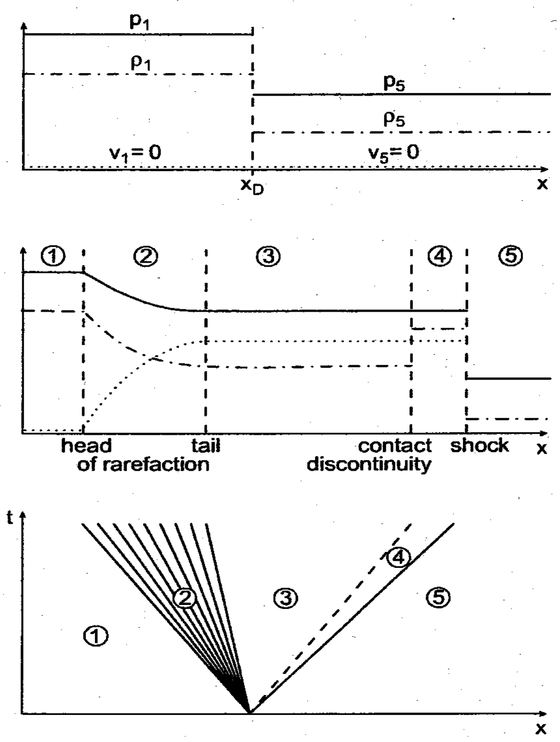
物理的粘性・人工粘性・数値粘性

- 古典的計算法（標準ＳＰＨ）の人工粘性
  $\beta(\partial^2 v/\partial x^2)$ に比例するNavier-Stokes項的粘性項
  $\alpha(\partial v/\partial x)^2$ に比例するBurnett項的粘性項
  … von Neumann & Richtmyer の人工粘性項

- 必要最小限の粘性を自動的に入れるには…Godunovの方法
  - リーマン問題の解析解を用いて数値流速を計算

Riemann問題

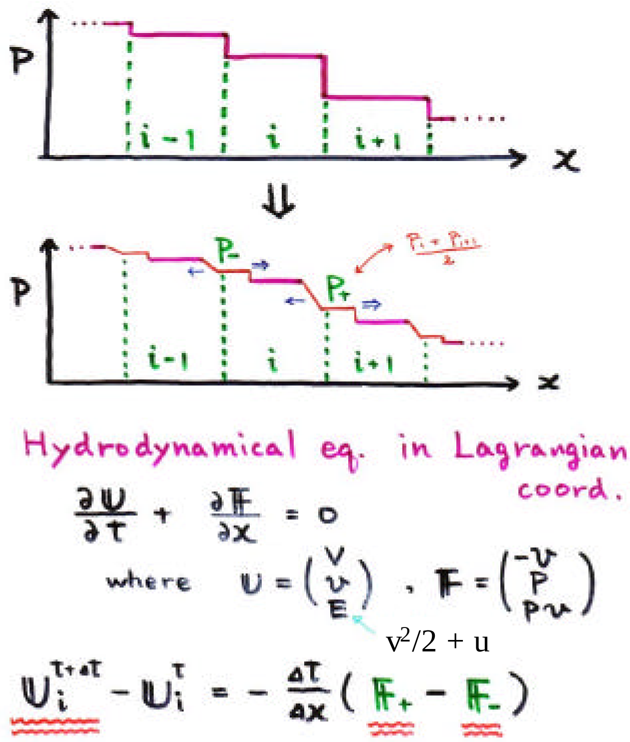
- 不連続面を含む初期条件からの時間発展
  ⇒半解析解



Martí & Müller 1999, LRRより

Godunov法

- 物理的で安定な計算方法の基本概念
- 空間一次精度



SPH法における密度の定義

r_i : i番目の粒子の位置x_iでの密度

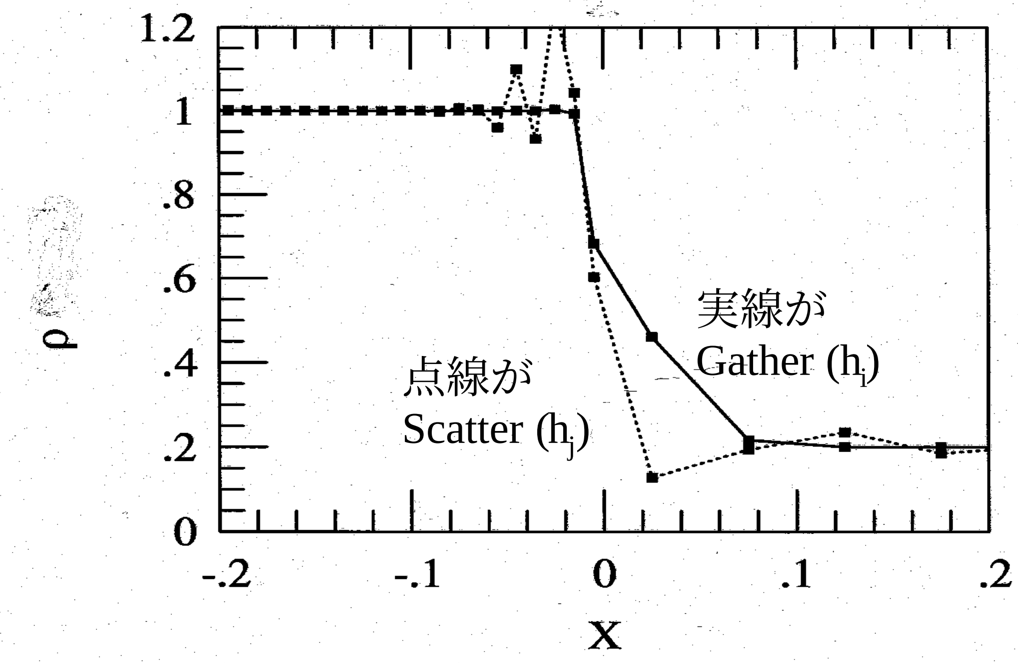
$$r_i = \sum_j m_j W(x_i - x_j, h)$$

$W(x,h)$: kernel function, 具体的形の例は

$$W(x,h) \equiv \left(\frac{1}{h\sqrt{p}} \right)^d e^{-\left(\frac{x}{h}\right)^2}$$

h : smoothing length, 一般的には可変にする

注: Scatter法(h_j)ではなく、Gather法(h_i)を!



Godunov SPH の説明

紙面の都合で省略)

Web上のGodunovSPH.pdf もしくは、
下記論文を参照してください.

"Reformulation of Smoothed Particle Hydrodynamics with Riemann Solver"
Shu-ichiro Inutsuka
Journal of Computational Physics, **179**, 238-267, 2002

標準テスト計算について

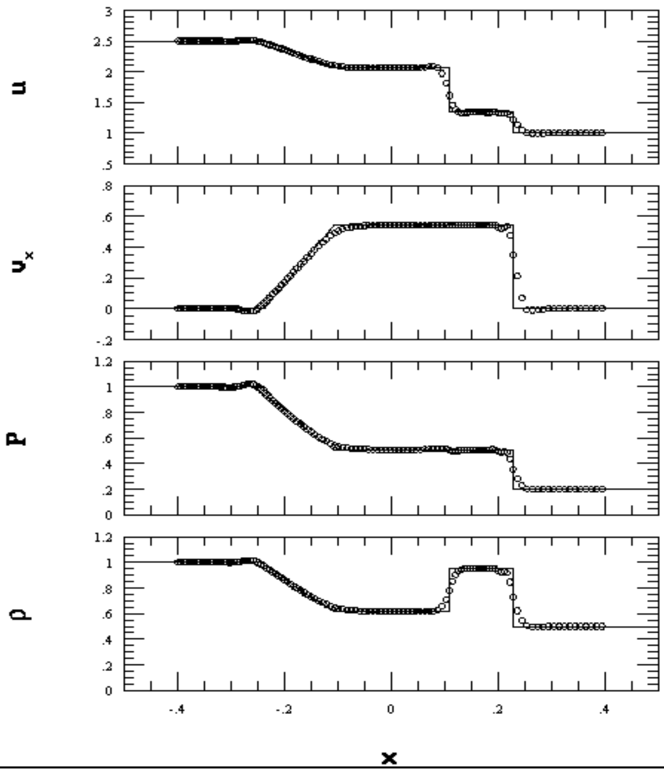
時間の都合で、以下のみ説明する.

1Dの衝撃波管問題

2Dの風洞実験問題

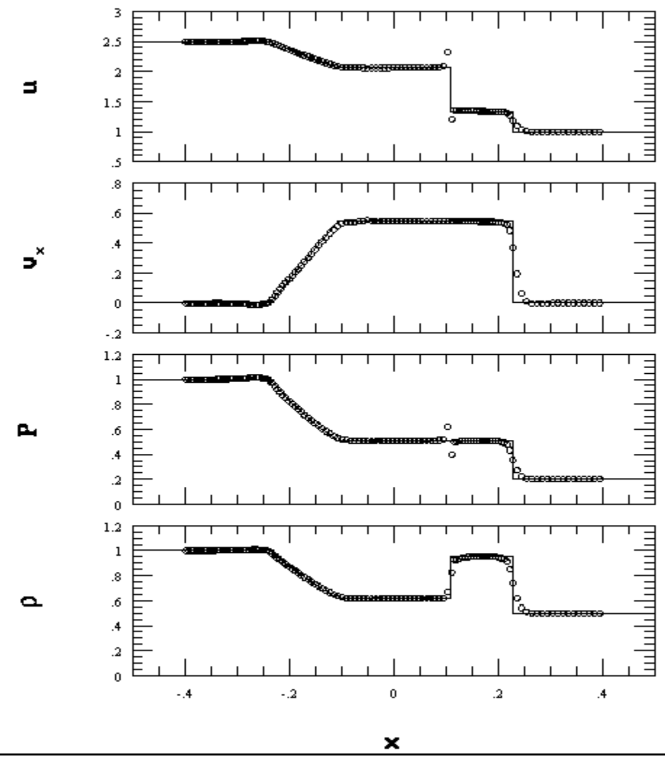
1Dの衝撃波管問題
Godunov SPHの結果

空間2次精度の
Riemann Solver
variable *h*



1Dの衝撃波管問題
Standard SPHの結果

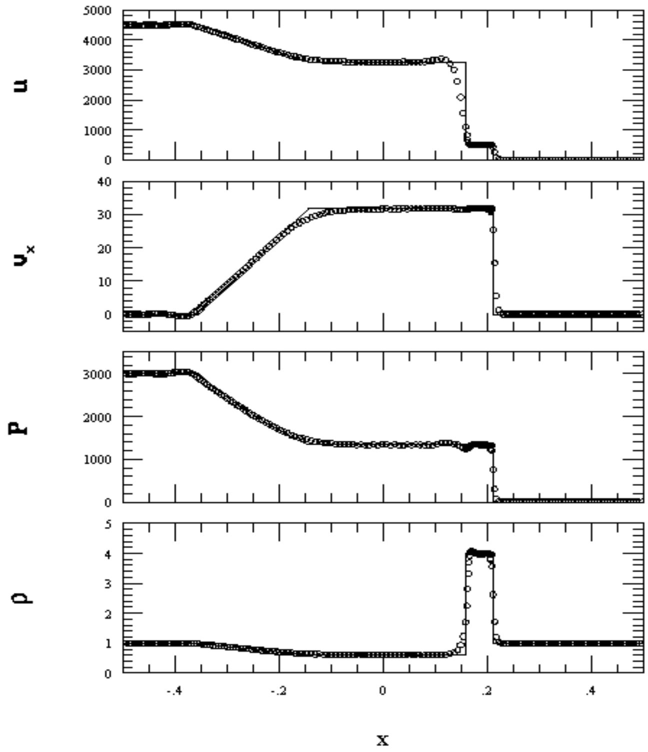
Monaghan’s viscosity
variable *h*



1Dの衝撃波管問題

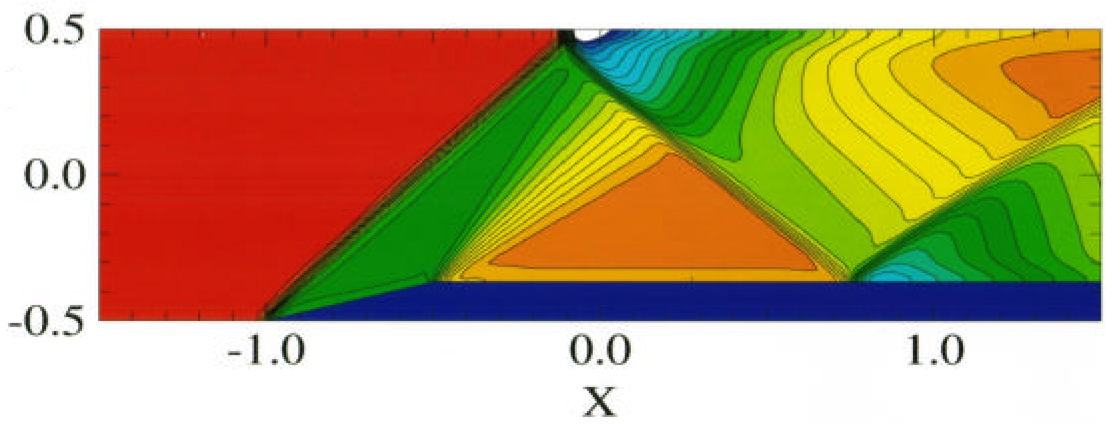
Mach Number=10^5

Godunov SPHの結果



2Dの風洞実験問題

"15 Degree Wedge Channel Flow"



Mach Number=2

15 Degree Wedge Channel Flow

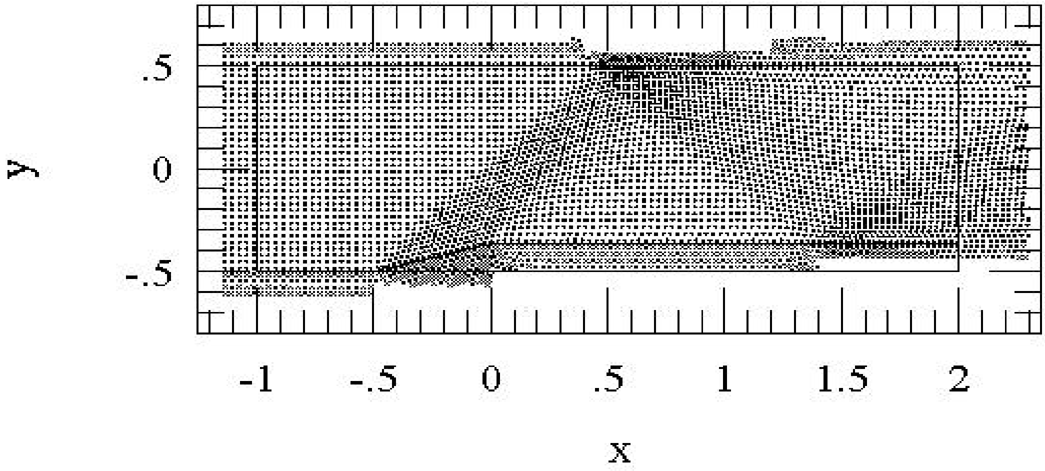


FIG. 10. Same as Fig.9 but positions of particles are plotted. The crosses denote the positions of "ghost particles" that are introduced to mimic the rigid wall boundary condition.

その他の物理

- 重力はW(x)でconvolutionして入れる.

  Ψを厳密な重力ポテンシャルとすると

  加速度 $\vec{a}_{grav}(x) = \int \vec{\nabla} Y\ (x')W(x'-x)\,dx'$

  とすれば良い.
- 輻射冷却/過熱、化学反応などは粒子ごとに.
- 特殊相対論的計算法も作用原理から導出可.

その他（今後）の発展

- 非球状kernelを使って精度を稼ぐ
  - 米テキサス大のグループ
    - 課題：保存則は？
- 輻射流体力学への拡張
  - Inutsuka 1999, 2002等
- 降着円盤（強いシアー流）への応用
  - Imaeda & Inutsuka 2002, ApJ **569**, 501
    - 課題：可変hの場合の定式化
- MHDは電流Jを時間発展させ、Bは積分形で
  - 募集中

SPH法とメッシュ法の比較

SPH法の長所
- アルゴリズムが簡単
- 高密度の場所で高精度
- 化学反応計算などに有利
- 衝撃波のない所で低散逸

SPH法の短所
- 計算がクラッシュしにくい（初学者には短所）
- 計算時間がかかる（メモリー量は少なめ）
- 低密度の場所は低精度（e.g., MHD）